7.12.11. Вычислить силу давления жидкости на вертикальную стенку в форме эллипса с осями $2a$ и $2b$, центр которого погружен в жидкость на уровень $h\,(h\geqslant b)$ (удельный вес жидкости d).

7.12.12. Вычислить силу давления жидкости на боковые стенки кругового цилиндра, высота которого равна h, а радиус основания r. Удельный вес жидкости равен d, и жидкость полностью заполняет цилиндр.

7.12.13. Вычислить работу на преодоление силы тяжести, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз. Высота конуса H, радиус основания R.

7.12.14. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 6 *см*, если сила 1 *кг* растягивает ее на 1 *см*.

§ 7.13. Вычисление статических моментов и моментов инерции. Определение координат центра тяжести

Во всех задачах этого параграфа мы будем считать, что масса равномерно распределена по телу (линейному, плоскому, пространственному) и что плотность равна единице.

1. Для плоской кривой L статические моменты M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy выражаются формулами

$$M_x=\int\limits_L y\,dl,\qquad M_y=\int\limits_L x\,dl.$$

Момент инерции относительно начала координат

$$I_0=\int\limits_L (x^2+y^2)\,dl.$$

При задании кривой L явным уравнением $y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ в этих формулах надо заменить dl на $\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

При задании кривой L параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ в этих формулах надо заменить dl на $\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$.

2. Для плоской фигуры, ограниченной кривыми $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, $y_1(x)\leqslant y_2(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b\,(a\leqslant x\leqslant b)$ статические моменты выражаются формулами

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx;\quad M_y=\int\limits_a^b x\,(y_2-y_1)\,dx.$$

3. Центр тяжести плоской кривой L имеет координаты $x_c=M_y/l$, $y_c=M_x/l$, где l — длина кривой L. Центр тяжести плоской фигуры имеет координаты $x_c=M_y/S$, $y_c=M_x/S$, где S — площадь фигуры.

7.13.1. Найти статический момент верхней части эллипса

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

относительно оси Ox.

Решение. Для эллипса

$$y\,dl=y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{y^2+(yy')^2}\,dx;$$

так как $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$ и $yy'=-\frac{b^2}{a^2}x$, то

$$y\,dl=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2}\,dx=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx,$$

где ε — эксцентриситет эллипса, $\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$.

Интегрируя от $-a$ до a, находим

$$M_x=\frac{b}{a}\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=\frac{2b}{a}\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=$$

$$=\frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)=b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

В случае окружности, т. е. при $a=b$, будем иметь $M_x=2a^2$, так как при этом $\varepsilon=0$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}=1$.

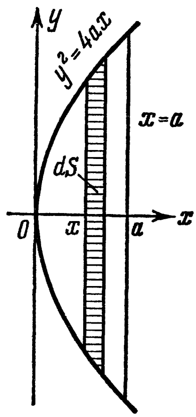

Рис. 110.

7.13.2. Найти момент инерции прямоугольника с основанием b и высотой h относительно его основания.

Решение. Выделим из прямоугольника элементарную полоску, параллельную основанию, отстоящую от основания на расстоянии y и имеющую ширину dy. Масса полоски равна ее площади $dS=b\,dy$, а расстояния от всех ее точек до основания равны y с точностью до dy. Поэтому $dI_x=by^2\,dy$ и

$$I_x=\int\limits_0^h by^2\,dy=\frac{bh^3}{3}.$$

7.13.3. Найти момент инерции дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, лежащей в первом квадранте, относительно оси Oy.

7.13.4. Вычислить момент инерции относительно оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y^2=4ax$ и прямой $x=a$.

Решение. Имеем $dI_x=x^2\,dS$, где dS — площадь вертикальной полоски на расстоянии x от оси Oy (рис. 110):

$$dS=2|y|\,dx=2\sqrt{4ax}\,dx.$$

Отсюда

$$I_x=\int\limits_0^a 4x^2\sqrt{ax}\,dx=4\sqrt{a}\int\limits_0^a x^{5/2}\,dx=\frac{8}{7}a^4.$$

7.13.5. При расчете балочных деревянных мостов часто приходится иметь дело с круглыми бревнами, отесанными на два канта (рис. 111). Определить момент инерции подобного сечения относительно горизонтальной средней линии.

Решение. Расположим систему координат, как показано на рисунке. Тогда (обозначения см. на рис. 111) $dI_x = y^2\,dS$, где $dS = MN\,dy = 2x\,dy = 2\sqrt{R^2-y^2}\,dy$.

Отсюда

$$I_x = 2\int_{-h}^{h} y^2\sqrt{R^2-y^2}\,dy = 4\int_{0}^{h} y^2\sqrt{R^2-y^2}\,dy.$$

Произведя подстановку $y = R\sin t$; $dy = R\cos t\,dt$; $t_1 = 0$; $t_2 = \arcsin(h/R)$, получим

$$I_x = 4\int_{0}^{h} y^2\sqrt{R^2-y^2}\,dy = 4\int_{0}^{\arcsin(h/R)} R^2\sin^2 t\cdot R\cos t\,R\cos t\,dt =$$

$$= 4R^4\int_{0}^{\arcsin(h/R)} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{R^4}{2}\int_{0}^{\arcsin(h/R)} (1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= \frac{R^4}{2}\arcsin\frac{h}{R} + \frac{h}{R}(2h^2-R^2)\sqrt{R^2-h^2}.$$

В частности, при $h = R$ получаем момент инерции круга относительно одного из диаметров: $I_x = \pi R^4/4$.

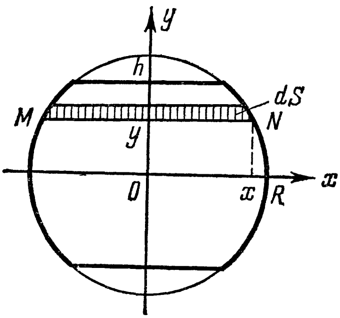

Рис. 111.

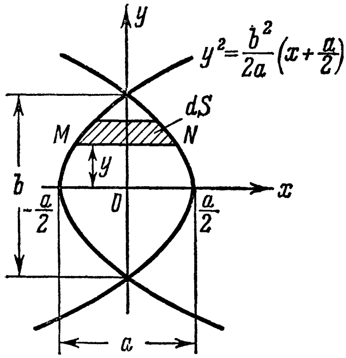

Рис. 112.

7.13.6. Определить момент инерции относительно оси Ox фигуры, ограниченной двумя параболами (рис. 112) с указанными на рисунке размерами (такую форму иногда придают сечению стержней в конструкциях блоков самолетов, чтобы они хорошо резали воздух).

Решение. Разместим систему координат так, как показано на рис. 112, и составим уравнения парабол.

Уравнение левой параболы: $y^2 = \frac{b^2}{2a}\left(x+\frac{a}{2}\right)$, уравнение правой параболы: $y^2 = \frac{b^2}{2a}\left(\frac{a}{2}-x\right)$.

Для выделенной полоски момент инерции

$$dI_x = y^2\,dS = y^2\,|MN|\,dy,$$

где

$$|MN| = x_2 - x_1 = 2\left(\frac{a}{2} - \frac{2a}{b^2}y^2\right) = a - \frac{4a}{b^2}y^2.$$

Следовательно,

$$I_x = \int\limits_{-b/2}^{b/2} y^2\left(a - \frac{4a}{b^2}y^2\right)dy = 2\int\limits_{0}^{b/2} y^2\left(a - \frac{4a}{b^2}y^2\right)dy = \frac{ab^3}{30}.$$

7.13.7. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy дуги параболы $y^2 = 2x$ от $x = 0$ до $x = 2\,(y > 0)$.

7.13.8. Найти статические моменты относительно осей координат отрезка прямой $x/a + y/b = 1$, заключенного между осями координат.

7.13.9. Найти статический момент дуги кривой $y = \cos x$ от точки $x_1 = -\pi/2$ до точки $x_2 = \pi/2$ относительно оси Ox.

7.13.10. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$, относительно оси Ox.

7.13.11. Найти момент инерции относительно осей Ox и Oy треугольника, ограниченного линиями $x = 0$, $y = 0$ и $x/a + y/b = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$.

7.13.12. Найти момент инерции трапеции $ABCD$ относительно ее основания AD, если $AD = a$, $BC = b$, а высота трапеции равна h.

7.13.13. Найти центр тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$, расположенной над осью Ox.

Решение. Так как дуга полуокружности симметрична относительно оси Oy, то центр тяжести дуги лежит на оси Oy, т. е. $x_c = 0$.

Для нахождения ординаты y_c воспользуемся результатом задачи 7.13.1: $M_x = 2a^2$; поэтому $y_c = 2a^2/(\pi a) = 2a/\pi$. Таким образом, $x_c = 0$, $y_c = 2a/\pi$.

7.13.14. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$$

от точки $A(0,\ 1)$ до точки $B(a,\ \operatorname{ch} a)$.

Решение. Имеем

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\,dx = \operatorname{ch} x\,dx.$$

Отсюда находим

$$l = \int\limits_L dl = \int\limits_0^a \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} a.$$

Далее,

$$M_y = \int\limits_L x\,dl = \int\limits_0^a x \operatorname{ch} x\,dx = x \operatorname{sh} x\Big|_0^a - \int\limits_0^a \operatorname{sh} x\,dx = a \operatorname{sh} a - \operatorname{ch} a + 1.$$

Следовательно,

$$x_c=\frac{a\operatorname{sh}a-(\operatorname{ch}a-1)}{\operatorname{sh}a}=a-\frac{\operatorname{ch}a-1}{\operatorname{sh}a}=a-\operatorname{th}\frac{a}{2}.$$

Аналогично,

$$M_x=\int\limits_L y\,dl=\int\limits_0^a \operatorname{ch}^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^a (1+\operatorname{ch}2x)\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\operatorname{sh}2x}{2}\right)\Big|_0^a=$$
$$=\frac{a}{2}+\frac{\operatorname{sh}2a}{4};$$

$$y_c=\frac{a/2+(\operatorname{sh}2a)/4}{\operatorname{sh}a}=\frac{a}{2\operatorname{sh}a}+\frac{\operatorname{ch}a}{2}.$$

7.13.15. Найти центр тяжести дуги первой арки циклоиды:

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Решение. Первая арка циклоиды расположена симметрично относительно прямой $x=\pi a$, поэтому центр тяжести дуги циклоиды лежит на этой прямой и $x_c=\pi a$. Так как длина первой арки циклоиды $l=8a$, то

$$y_c=\frac{1}{l}\int\limits_L y\,dl=\frac{1}{8a}2a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt=\frac{a}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=\frac{4}{3}a.$$

7.13.16. Определить координаты центра тяжести той части дуги астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, которая расположена в первом координатном углу.

7.13.17. Найти декартовы координаты центра тяжести дуги кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$ от $\varphi=0$ до $\varphi=\pi$.

Решение. Запишем уравнение кардиоиды в параметрической форме:

$$x=\rho\cos\varphi=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi;$$
$$y=\rho\sin\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi.$$

При изменении параметра φ от 0 до π текущая точка $(x,\ y)$ опишет верхнюю часть кривой. Так как длина всей кардиоиды равна $8a$, а

$$dl=\sqrt{(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2}\,d\varphi=2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\qquad (\text{см. } \mathbf{7.9.3}),$$

то

$$x_c=\frac{1}{l}\int\limits_L y\,dl=\frac{1}{4a}\int\limits_0^{\pi}a\sin\varphi(1+\cos\varphi)\,2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$
$$=2a\int\limits_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=-\frac{4}{5}a\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{5}a.$$

Аналогично,

$$y_c=\frac{1}{4a}\int_L x\,dl=\frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a\cos\varphi\,(1+\cos\varphi)\,2a\,\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=a\int_0^{\pi}\cos\varphi\cos^3\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=a\int_0^{\pi}\left(2\cos^5\frac{\varphi}{2}-\cos^3\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi.$$

Положив $\varphi/2=t$, получим (см. **6.6.9**)

$$y_c=2a\int_0^{\pi/2}(2\cos^5 t-\cos^3 t)\,dt=4a\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}-2a\frac{2}{3}=\frac{4}{5}a.$$

Итак, $x_c=y_c=4a/5$.

Интересно отметить, что центр тяжести рассмотренной половины дуги кардиоиды лежит на биссектрисе первого координатного угла, хотя сама дуга и не симметрична относительно этой биссектрисы.

7.13.18. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной эллипсом $4x^2+9y^2=36$ и окружностью $x^2+y^2=9$ и расположенной в первом квадранте (рис. 113).

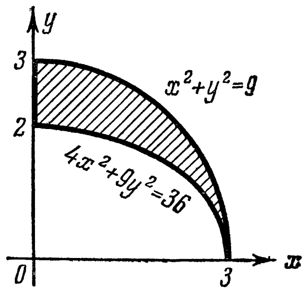

Рис. 113.

Решение. Вычислим сначала статические моменты:

$$M_y=\int_0^3 x\,(y_2-y_1)\,dx=\int_0^3 x\left[\sqrt{9-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right]dx=\frac{1}{3}\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx=3;$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^3(y_2^2-y_1^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left[(9-x^2)-\frac{4}{9}(9-x^2)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3\left(5-\frac{5}{9}x^2\right)dx=5.$$

Площадь четверти круга радиуса 3 равна $9\pi/4$, а площадь четверти эллипса с полуосями $a=3$ и $b=2$ равна $3\pi/2$, поэтому площадь рассматриваемой фигуры $S=9\pi/4-3\pi/2=3\pi/4$.

Таким образом,

$$x_c=M_y/S=4/\pi;\qquad y_c=M_x/S=20/(3\pi).$$

7.13.19. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной параболой $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ и осями координат.

7.13.20. Найти декартовы координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой

$$\rho = a\cos^3\varphi \qquad (a > 0).$$

Решение. Так как всегда $\rho \geqslant 0$, то данная кривая описывается при изменении φ от $-\pi/2$ до $\pi/2$. При этом она симметрична относительно полярной оси в силу четности функции $\cos\varphi$ и проходит через начало координат при $\varphi = \pm\pi/2$.

Вычислим площадь S полученной фигуры:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\rho^2\,d\varphi = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^6\varphi\,d\varphi = a^2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{32}\pi a^2.$$

Выберем теперь оси координат так, как показано на рис. 114. Тогда параметрическими уравнениями кривой будут

$$x = \rho\cos\varphi = a\cos^4\varphi;$$
$$y = \rho\sin\varphi = a\sin\varphi\cos^3\varphi.$$

Центр тяжести фигуры лежит на оси Ox, т. е. $y_c = 0$, в силу

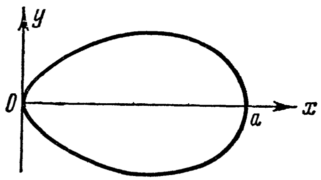

Рис. 114.

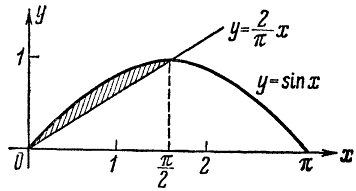

Рис. 115.

отмеченной выше симметрии относительно оси Ox. Остается определить x_c:

$$x_c = \frac{2\int_0^a xy\,dx}{S} = \frac{8a^3}{S}\int_0^{\pi/2}\cos^{10}\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{8a^3}{S}\int_0^{\pi/2}(\cos^{10}\varphi - \cos^{12}\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{8a^3}{(5/32)\pi a^2}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{21}{40}a.$$

7.13.21. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной прямой $y = (2/\pi)x$ и синусоидой $y = \sin x$ при $x \geqslant 0$ (рис. 115).

Решение. Прямая $y = (2/\pi)x$ и синусоида $y = \sin x$ пересекаются в точках $(0, 0)$ и $(\pi/2, 1)$. Площадь S фигуры, ограниченной этими линиями, равна

$$S = \int_0^{\pi/2}\left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right)dx = \frac{4-\pi}{4}.$$

Отсюда

$$x_c=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x-\frac{4}{\pi^2}x^2\right)dx}{(4-\pi)/4}=\frac{2}{4-\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x-\frac{4}{\pi^2}x^2\right)dx=$$

$$=\frac{2}{4-\pi}\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{4}{3\pi^2}x^3\right]\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{6(4-\pi)};$$

$$y_c=\frac{\int\limits_0^{\pi/2}x\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx}{(4-\pi)/4}=\frac{4}{4-\pi}\int\limits_0^{\pi/2}x\sin x\,dx-\frac{8}{\pi(4-\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}x^2\,dx=$$

$$=\frac{4}{4-\pi}-\frac{\pi^2}{3(4-\pi)}=\frac{12-\pi^2}{12-3\pi}.$$

7.13.22. Доказать следующие теоремы (Гульдена):

1) *Площадь поверхности, полученной при вращении дуги плоской кривой вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости дуги по одну сторону от нее, равняется произведению длины вращающейся дуги на длину пути, описанного ее центром тяжести.*

2) *Объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади вращающейся фигуры на длину пути, описанного ее центром тяжести.*

Решение. 1) Сравним формулы для площади поверхности вращения кривой L вокруг оси Ox (см. § 7.10)

$$P=2\pi\int\limits_L y\,dl$$

и для ординаты центра тяжести этой кривой

$$y_c=\frac{M_x}{l}=\frac{1}{l}\int\limits_L y\,dl.$$

Отсюда заключаем, что

$$P=2\pi l y_c=l\cdot 2\pi y_c,$$

где l — длина вращающейся дуги, а $2\pi y_c$ — длина окружности радиуса y_c, т. е. длина окружности, описанной центром тяжести при вращении вокруг оси Ox.

2) Сравним формулы для объема тела вращения плоской фигуры вокруг оси Ox (см. § 7.6)

$$V=\pi\int\limits_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

и для ординаты центра тяжести этой фигуры

$$y_c=\frac{M_x}{S}=\frac{1}{2S}\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx.$$

Отсюда заключаем, что

$$V=\pi\cdot 2Sy_c=S\cdot 2\pi y_c,$$

где S — площадь вращающейся фигуры, а $2\pi y_c$ — длина окружности, описанной центром тяжести при вращении вокруг оси Ox.

7.13.23. Пользуясь первой теоремой Гульдена, найти центр тяжести полуокружности радиуса a.

Решение. Выберем координатные оси так, как показано на рис. 116. В силу симметрии $x_c=0$. Остается найти y_c. Если полуокружность вращать вокруг оси Ox, то поверхность P тела вращения равна $4\pi a^2$, длина дуги $l=\pi a$. Поэтому по первой теореме Гульдена

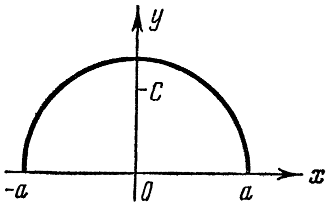

Рис. 116.

$$4\pi a^2=\pi a\cdot 2\pi y_c;\qquad y_c=2\frac{a}{\pi}.$$

7.13.24. Пользуясь второй теоремой Гульдена, найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды:

$$x=a(t-\sin t);\qquad y=a(1-\cos t).$$

Решение. В силу симметрии фигуры относительно прямой $x=\pi a$ ее центр тяжести лежит на этой прямой; значит, $x_c=\pi a$.

Объем V, полученный вращением этой фигуры вокруг оси Ox, равен $5\pi^2a^3$ (см. задачу **7.6.14**), а площадь S фигуры равна $3\pi a^2$ (см. задачу **7.4.3**). Применяя вторую теорему Гульдена, получим

$$y_c=\frac{V}{2\pi S}=\frac{5\pi^2a^3}{2\pi\cdot 3\pi a^2}=\frac{5a}{6}.$$

7.13.25. Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг оси, параллельной основанию и отстоящей от основания на расстояние $b>a$.

Найти объем тела вращения.

Решение. Имеются две возможности расположения треугольника относительно оси вращения, которые показаны на рис. 117, *а*) и *б*).

Высота равностороннего треугольника равна $h=a\sqrt{3}/2$, площадь S равна $S=a^2\sqrt{3}/4$. Центр тяжести O' расположен в точке пересечения медиан и удален от оси вращения в первом случае на расстояние $b-a\sqrt{3}/6$, а во втором — на расстояние $b+a\sqrt{3}/6$.

По второй теореме Гульдена

$$V_1=\frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{4}\left(b-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)=\pi\left(\frac{a^2b\sqrt{3}}{2}-\frac{a^3}{4}\right),$$

$$V_2=\frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{4}\left(b+\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)=\pi\left(\frac{a^2b\sqrt{3}}{2}+\frac{a^3}{4}\right).$$

7.13.26. Найти центр тяжести дуги окружности радиуса R, стягивающей центральный угол 2α.

7.13.27. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной косинусоидой $y=\cos x$ от точки $x=-\pi/3$ до точки $x=\pi/3$ и прямой $y=1/2$.

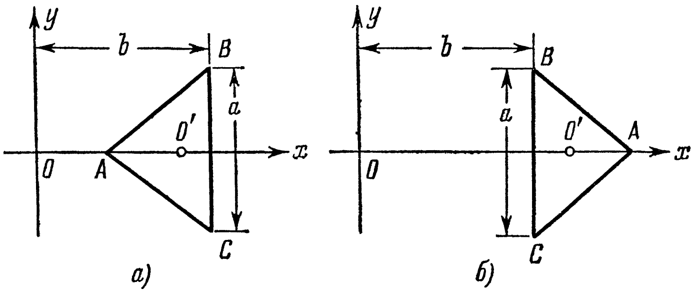

Рис. 117.

7.13.28. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2=ax^3-x^4$.

7.13.29. Найти декартовы координаты центра тяжести дуги логарифмической спирали $\rho=ae^{\varphi}$ от $\varphi_1=\pi/2$ до $\varphi_2=\pi$.

7.13.30. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг одной из сторон. Найти объем полученного тела вращения.

7.13.31. Пользуясь теоремой Гульдена, найти центр тяжести полукруга радиуса R.

§ 7.14. Дополнительные задачи

7.14.1. Найти площадь части фигуры, ограниченной кривыми $y^m=x^n$ и $y^n=x^m$ (m и n — целые положительные числа), расположенной в первом квадранте. Рассмотреть вопрос о площади всей фигуры в зависимости от характера четности чисел m и n.

7.14.2. а) Доказать, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=a$, $x=b$ и параболой $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, можно вычислить по формуле Чебышева

$$S=\frac{b-a}{3}\left[y\left(\frac{a+b}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{b-a}{2}\right)+y\left(\frac{a+b}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+y\left(\frac{a+b}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{b-a}{2}\right)\right].$$