По второй теореме Гульдена

$$V_1=\frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{4}\left(b-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)=\pi\left(\frac{a^2b\sqrt{3}}{2}-\frac{a^3}{4}\right),$$

$$V_2=\frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{4}\left(b+\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)=\pi\left(\frac{a^2b\sqrt{3}}{2}+\frac{a^3}{4}\right).$$

7.13.26. Найти центр тяжести дуги окружности радиуса R, стягивающей центральный угол 2α.

7.13.27. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной косинусоидой $y=\cos x$ от точки $x=-\pi/3$ до точки $x=\pi/3$ и прямой $y=1/2$.

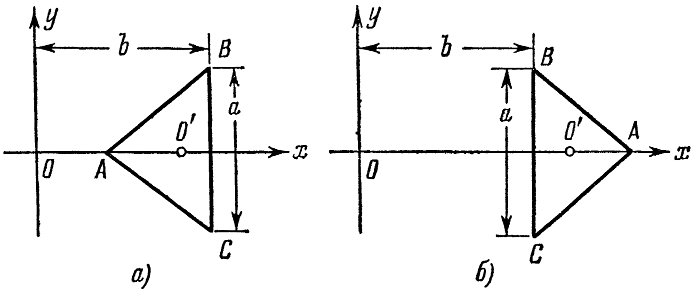

Рис. 117.

7.13.28. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2=ax^3-x^4$.

7.13.29. Найти декартовы координаты центра тяжести дуги логарифмической спирали $\rho=ae^{\varphi}$ от $\varphi_1=\pi/2$ до $\varphi_2=\pi$.

7.13.30. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг одной из сторон. Найти объем полученного тела вращения.

7.13.31. Пользуясь теоремой Гульдена, найти центр тяжести полукруга радиуса R.

§ 7.14. Дополнительные задачи

7.14.1. Найти площадь части фигуры, ограниченной кривыми $y^m=x^n$ и $y^n=x^m$ (m и n — целые положительные числа), расположенной в первом квадранте. Рассмотреть вопрос о площади всей фигуры в зависимости от характера четности чисел m и n.

7.14.2. а) Доказать, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=a$, $x=b$ и параболой $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, можно вычислить по формуле Чебышева

$$S=\frac{b-a}{3}\left[y\left(\frac{a+b}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{b-a}{2}\right)+y\left(\frac{a+b}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+y\left(\frac{a+b}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{b-a}{2}\right)\right].$$

б) Доказать, что аналогичную площадь для параболы

$$y=Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$$

можно вычислить по формуле Гаусса

$$S=\frac{b-a}{9}\left[5y\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{\frac{3}{5}}\,\frac{b-a}{2}\right)+8y\left(\frac{a+b}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+5y\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{3}{5}}\,\frac{b-a}{2}\right)\right].$$

7.14.3. Показать, что площадь фигуры, ограниченной любыми двумя радиус-векторами логарифмической спирали $\rho=ae^{m\varphi}$ и ее дугой, пропорциональна разности квадратов этих радиусов.

7.14.4. Доказать, что если два тела, содержащиеся между параллельными плоскостями P и Q, обладают тем свойством, что в сечении их любой плоскостью R, параллельной этим плоскостям, получаются равновеликие фигуры, то объемы этих тел равны (*принцип Кавальери*).

7.14.5. Доказать, что если функция $S(x)$ $(0\leqslant x\leqslant h)$, выражающая площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, есть многочлен не выше третьей степени, то объем этого тела равен $V=(h/6)\,[S(0)+4S(h/2)+$ $+S(h)]$. Пользуясь этой формулой, вывести формулы для объема шара, шарового слоя, шарового сегмента, конуса, усеченного конуса, эллипсоида, параболоида вращения.

7.14.6. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant y(x)$, где $y(x)$ — однозначная непрерывная функция, равен

$$V=2\pi\int\limits_a^b xy(x)\,dx.$$

7.14.7. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси фигуры

$$0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi,\qquad 0\leqslant\rho\leqslant\rho(\varphi),$$

равен

$$V=\frac{2\pi}{3}\int\limits_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

7.14.8. Доказать, что длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x&=f''(t)\cos t+f'(t)\sin t,\\ y&=-f''(t)\sin t+f'(t)\cos t \end{aligned}\qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2),$$

равна $[f(t)+f''(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}$.

7.14.9. Вычислить длину дуги кривой, заданной в параметрической форме

$$x=\int\limits_1^t\frac{\cos z}{z}\,dz,\qquad y=\int\limits_1^t\frac{\sin z}{z}\,dz,$$

от начала координат до ближайшей точки с вертикальной касательной.

7.14.10. Вывести формулу для длины дуги в полярных координатах, исходя из определения, не прибегая к преобразованию декартовых координат в полярные.

7.14.11. Доказать, что длина дуги $l(x)$ цепной линии $y = \operatorname{ch} x$, отсчитываемой от точки (0, 1), выражается формулой $l(x) = \operatorname{sh} x$, и найти параметрические уравнения этой линии, приняв за параметр длину дуги.

7.14.12. Гибкая нить подвешена в точках A и B, находящихся на одной высоте на расстоянии $AB = 2b$, и имеет стрелу прогиба f. Считая форму нити параболой, показать, что длина нити

$$l = 2b\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{b^2}\right)$$

при достаточно малом f/b.

7.14.13. Найти отношение площади, ограниченной петлей кривой

$$y = \pm (1/3 - x)\sqrt{x},$$

к площади круга, длина окружности которого равна длине контура этой кривой.

7.14.14. Вычислить длину дуги, образованной пересечением параболического цилиндра

$$(y + z)^2 = 4ax$$

с эллиптическим конусом

$$\frac{4}{3}x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

от начала координат до точки $M(x, y, z)$.

7.14.15. Доказать, что площадь S эллипса

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (AC - B^2 > 0)$$

равна

$$S = -\frac{\pi\Delta}{(AC - B^2)^{3/2}}, \quad \text{где} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

7.14.16. Найти: а) площадь S фигуры, ограниченной гиперболой $x^2 - y^2 = 1$, положительной частью оси Ox и радиус-вектором, соединяющим начало координат с точкой $M(x, y)$, лежащей на этой гиперболе.

б) Площадь кругового сектора Q, ограниченного осью Ox и радиусом, проведенным в точку $N(x, y)$, лежащую на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Доказать, что координаты точек M и N выражаются соответственно через площади S и Q по формулам

$$x_M = \operatorname{ch} 2S, \quad y_M = \operatorname{sh} 2S, \quad x_N = \cos 2Q, \quad y_N = \sin 2Q.$$

7.14.17. Доказать, пользуясь теоремой Гульдена, что центр тяжести треугольника отстоит от его основания на одну треть высоты.

7.14.18. Пусть ξ — абсцисса центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. Доказать справедливость следующего равенства:

$$\int_a^b (ax + b) f(x)\,dx = (a\xi + b)\int_a^b f(x)\,dx$$

(правило Верещагина).

7.14.19. Пусть криволинейный сектор ограничен двумя радиус-векторами и непрерывной кривой $\rho = f(\varphi)$. Доказать, что координаты центра тяжести такого сектора выражаются следующими формулами:

$$x_c=\frac{2}{3}\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3\cos\varphi\,d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi};\qquad y_c=\frac{2}{3}\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3\sin\varphi\,d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi}.$$

7.14.20. Доказать, что декартовы координаты центра тяжести дуги кривой $\rho=f(\varphi)$ выражаются следующими формулами:

$$x_c=\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi};\qquad y_c=\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}.$$