Глава VIII

# Несобственные интегралы

## § 8.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \geqslant a$ и интегрируема на любом отрезке $[a, A]$. Тогда $\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом* от $f(x)$ в пределах от $a$ до $+\infty$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Аналогично определяются интегралы $\int\limits_{-\infty}^{B} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{B} f(x)\,dx = \lim_{A \to -\infty} \int\limits_A^B f(x)\,dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to -\infty} \int\limits_A^C f(x)\,dx + \lim_{B \to +\infty} \int\limits_C^B f(x)\,dx.$$

Если приведенные пределы существуют и конечны, то соответствующие интегралы называются *сходящимися*. В противном случае интегралы называются *расходящимися*.

*Признак сравнения.* Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для всех $x \geqslant a$ и интегрируемы на каждом отрезке $[a, A]$, $A \geqslant a$. Если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \geqslant a$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$, причем $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$; из расходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ вытекает расходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$.

*Частный признак сравнения.* Если при $x \to \infty$ функция $f(x) \geqslant 0$ является бесконечно малой порядка $\lambda > 0$ по сравнению с $1/x$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \leqslant 1$.

*Признак абсолютной сходимости.* Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \geqslant a$. Если интеграл $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$, причем

$$\left|\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx.$$

Если интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, а $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется *условно сходящимся.*

Замена переменной в несобственном интеграле основывается на следующей теореме

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geqslant a$. Если функция $x = \varphi(t)$, определенная на промежутке $\alpha < t < \beta$ ($\alpha$ и $\beta$ могут быть и несобственными числами $-\infty$ и $\infty$), имеет непрерывную производную $\varphi'(t) \neq 0$ и $\lim\limits_{t \to \alpha+0} \varphi(t) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta-0} \varphi(t) = +\infty$, то*

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Интегрирование по частям не вызывает затруднений.

**8.1.1.** Вычислить следующие несобственные интегралы с бесконечными пределами или установить их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

а) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; в) $\int\limits_0^{\infty} x \sin x\,dx$.

Решение. а) По определению,

$$\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{e^2}^{A} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{2 \ln^2 x}\Bigg|_{e^2}^{A}\right) =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2 \ln^2 A}\right) = \frac{1}{8}.$$

б) По определению,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{B \to -\infty} \int\limits_{B}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{A \to +\infty} \int\limits_0^{A} \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

(вместо точки $x=0$ в качестве промежуточного предела интегрирования можно взять любую другую конечную точку оси $Ox$).

Вычислим каждый из пределов, стоящих в правой части написанного выше равенства:

$$\lim_{B\to-\infty}\int_B^0\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{B\to-\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Big|_B^0=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Big|_0^A=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\frac{\pi}{2}.$$

в) По определению,

$$\int_0^{\infty}x\sin x\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\sin x\,dx.$$

Полагая $u=x$, $dv=\sin x\,dx$ и интегрируя по частям под знаком предела, получим

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\sin x\,dx=\lim_{A\to+\infty}\left(-x\cos x\Big|_0^A+\int_0^A\cos x\,dx\right)=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}(-A\cos A+\sin A).$$

Однако последний предел не существует. Следовательно, интеграл $\int_0^{\infty}x\sin x\,dx$ расходится.

**8.1.2.** Вычислить следующие несобственные интегралы с бесконечными пределами, основываясь на определении этих интегралов:

а) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$; б) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+x^3}$; в) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$;

г) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)}$; д) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}$; е) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}\sin x\,dx$.

Решение. а) По определению,

$$\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{A\to+\infty} \left[ \frac{1}{2} \frac{(x^2-3)^{-1/2}}{-1/2} \Big|_2^A \right] =$$

$$= -\lim_{A\to+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{A^2-3}} - 1 \right] = 1.$$

**8.1.3.** Доказать, что интегралы вида

$$\int_a^{+\infty} e^{-px}\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{b} e^{px}\,dx$$

сходятся при любом постоянном $p > 0$ и расходятся при $p < 0$.

**8.1.4.** Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+2x^2+3x^4}.$$

Решение. Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{1}{1+2x^2+3x^4}$$

положительна и является бесконечно малой порядка $\lambda = 4$ по сравнению с $1/x$ при $x \to \infty$. Так как $4 > 1$, то по частному признаку сравнения интеграл сходится.

**8.1.5.** Исследовать сходимость интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+\sin^2 x}.$$

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = 1/(x+\sin^2 x)$ непрерывна и положительна при $x \geqslant 1$.

При $x \to \infty$ функция $f(x)$ является бесконечно малой порядка $\lambda = 1$ по сравнению с $1/x$; по частному признаку сравнения интеграл расходится.

**8.1.6.** Исследовать сходимость интегралов:

а) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$; б) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(1/x)}{1+x\sqrt{x}}\,dx$;

в) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$; г) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{3+\arcsin(1/x)}{1+x\sqrt{x}}\,dx$;

д) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

**8.1.7.** Исследовать сходимость интеграла

$$\int_1^\infty \frac{(x+\sqrt{x+1})\,dx}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}.$$

Решение. Подынтегральная функция непрерывна и положительна при $x \geqslant 1$. Определим порядок ее малости $\lambda$ относительно $1/x$ при $x \to \infty$; так как

$$\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1/x+1/x^2}}{1+2\sqrt[5]{1/x^6+1/x^{10}}},$$

то порядок $\lambda = 1$. По частному признаку сравнения интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}\,dx$ расходится.

**8.1.8.** Исследовать сходимость интеграла

$$\int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}.$$

Решение. Так как функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3(1-1/x)(1-2/x)}} = \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-1/x)(1-2/x)}}$$

является бесконечно малой порядка $\lambda = 3/2$ по сравнению с $1/x$ при $x \to +\infty$, то по частному признаку сравнения интеграл сходится.

**8.1.9.** Исследовать сходимость интеграла

$$\int_2^\infty \frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}}\,dx.$$

Решение. Подынтегральная функция непрерывна и положительна при $x \geqslant 2$. Определим порядок ее малости $\lambda$ относительно $1/x$ при $x \to +\infty$:

$$\frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}} = \frac{1}{x^{11/35}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2+3/x^2}}{\sqrt[5]{1-1/x^3}}.$$

Так как второй множитель имеет предел $\sqrt[7]{2}$ при $x \to +\infty$, то $\lambda = 11/35 < 1$. Следовательно, данный интеграл расходится.

**8.1.10.** Исследовать сходимость интеграла

$$\int_1^\infty \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx.$$

Решение. Подынтегральная функция

$$f(x)=1-\cos(2/x)=2\sin^2(1/x)$$

положительна и непрерывна при $x \geqslant 1$. Так как $2\sin^2(1/x) \sim 2(1/x)^2 = 2/x^2$, то по частному признаку сравнения данный интеграл сходится.

**8.1.11.** Исследовать сходимость интеграла

$$\int_1^\infty \ln \frac{e^{1/x}+(n-1)}{n}\,dx, \qquad n>0.$$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию $f(x)$:

$$f(x)=\ln\frac{e^{1/x}+(n-1)}{n}=\ln\left[1+\frac{e^{1/x}-1}{n}\right].$$

Так как функция $(e^{1/x}-1)/n$ является бесконечно малой при $x\to\infty$, то $f(x)\sim(e^{1/x}-1)/n\sim 1/(nx)$. Другими словами, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1/x}=1/n$. По частному признаку сравнения данный интеграл расходится.

**8.1.12.** Исследовать сходимость интеграла

$$\int_1^\infty \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Решение. Функция $f(x)=(1-4\sin 2x)/(x^3+\sqrt[3]{x})$ меняет знак вместе с изменением знака числителя. Исследуем сходимость интеграла

$$\int_1^\infty \frac{|1-4\sin 2x|}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Так как $|1-4\sin 2x|/(x^3+\sqrt[3]{x})<5/x^3$, а интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{5\,dx}{x^3}$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{|1-4\sin 2x|}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Таким образом, данный интеграл сходится, и притом абсолютно.

**8.1.13.** Доказать, что интеграл Дирихле

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

сходится условно.

Решение. Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Первый интеграл собственный $\left(\text{так как } \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$. Применяя ко второму интегралу метод интегрирования по частям, будем иметь

$$\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\lim_{A\to\infty}\int_{\pi/2}^{A}\frac{\sin x}{x}\,dx=\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{\cos x}{x}\Big|_{\pi/2}^{A}-\int_{\pi/2}^{A}\frac{\cos x\,dx}{x^2}\right]=$$
$$=-\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Но несобственный интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ сходится, и притом абсолютно, так как $|\cos x|/x^2\leqslant 1/x^2$, а интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится.

Таким образом, интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Аналогичным рассуждением легко доказать, что и интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$ также сходится. Теперь докажем, что интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится. Действительно,

$$\frac{|\sin x|}{x}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x},$$

но интеграл

$$\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{A}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\ln A-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx$$

расходится, так как $\lim\limits_{A\to\infty}\ln A=\infty$, а интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится.

**8.1.14.** Доказать, что интегралы

$$\text{а)} \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx; \quad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx; \quad \text{б)} \int_0^\infty 2x\cos(x^4)\,dx$$

сходятся.

Решение. а) Полагая $x=\sqrt{t}$, найдем

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Как и в предыдущем примере, интеграл, стоящий справа, представим в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt+\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Первое слагаемое есть собственный интеграл, так как $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}=0.$ Ко второму слагаемому применим интегрирование по частям, полагая

$$u=1/\sqrt{t}, \qquad \sin t\,dt=dv,$$

$$\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Bigg|_{\pi/2}^\infty-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^{3/2}}=-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt.$$

Последний интеграл сходится абсолютно, так как $\dfrac{|\cos t|}{t^{3/2}}\leqslant\dfrac{1}{t^{3/2}}$,

а интеграл $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \frac{dt}{t^{3/2}}$ сходится. Аналогично доказывается сходимость интеграла $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$. Рассмотренные интегралы называются *интегралами Френеля*. Они встречаются в теории дифракции света.

б) Подстановкой $x^2=t$ этот интеграл приводится к интегралу $\displaystyle\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt$. Последний интеграл, по доказанному, сходится.

Замечание. Интегралы Френеля показывают, что несобственный интеграл может сходиться и в том случае, когда подынтегральная функция не стремится к нулю при $x\longrightarrow\infty$. Последний же сходящийся интеграл, рассмотренный в пункте б), показывает, что несобственный интеграл может сходиться даже и тогда, когда подынтегральная функция не ограничена. Действительно, при $x=\sqrt[4]{n\pi}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ подынтегральная функция принимает значения $\pm\sqrt[4]{n\pi}$, т. е. она неограничена.

**8.1.15.** Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad n \text{ — натуральное число.}$$

Решение. Сделаем подстановку $x=\operatorname{tg} t$, где $0 \leqslant t < \pi/2$. Тогда $x=0$ при $t=0$, $x \to +\infty$ при $t \to \pi/2-0$ и $x'_t = 1/\cos^2 t \neq 0$. Следовательно, в силу теоремы о замене переменной в несобственном интеграле

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sec^{2n} t} \cdot \sec^2 t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t\, dt.$$

После замены переменной получился известный собственный интеграл, который вычислен в задаче **6.6.9.**

Поэтому

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} \pi/2, & n=1, \\ \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n>1. \end{cases}$$

**8.1.16.** Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\, dx.$

Решение. Применим подстановку

$$x=1/t;\quad dx=-(1/t^2)\,dt;\quad t_1=\infty,\quad t_2=0;$$

$$I=\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \int_0^\infty \frac{(1/t^4)\,dt}{1+1/t^4} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^4+1}.$$

Если прибавить к правой и левой частям по интегралу $I$, то получим

$$2I=\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt = \int_0^\infty \frac{1/t^2+1}{t^2+1/t^2}\,dt.$$

Применим подстановку $z=t-1/t$, $(1+1/t^2)\,dt=dz$. Тогда при $t\to+0$ будет $z\to-\infty$, при $t\to+\infty$ будет $z\to+\infty$. Следовательно,

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z^2+2}=\frac{1}{2}\left[\lim_{B\to-\infty}\int_B^0\frac{dz}{z^2+2}+\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dz}{z^2+2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{B\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{B}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{A}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

**8.1.17.** Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} x^{2m+1}\,dx$.

**8.1.18.** Вычислить с точностью до 0,01 интеграл

$$I=\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1}\,dx.$$

Решение. Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов

$$I_1=\int\limits_1^N \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1}\,dx, \qquad I_2=\int\limits_N^\infty \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1}\,dx,$$

первый из которых вычислим по формуле Симпсона с нужной точностью, а второй оценим. Так как при $x \geqslant 1$ имеем

$$0<\frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1}<\frac{x^{3/2}}{x^5}=x^{-7/2},$$

то

$$0<I_2=\int\limits_N^\infty x^{-7/2}\,dx=\frac{2}{5}N^{-5/2}.$$

При $N=7$ получаем оценку $I_2<\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{49\sqrt{7}}<0{,}0031$.

Вычисление интеграла

$$I_1=\int\limits_1^7 \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1}\,dx$$

по формуле Симпсона с шагом $h=1$ дает

$$S_1=0{,}2165,$$

а с шагом $h/2=0{,}5$ дает

$$S_{0,5}=0{,}2079.$$

Так как разность между этими значениями составляет 0,0076, то более точное значение $S_{0,5}=0{,}2079$ дает интеграл $I_1$ с ошибкой порядка $0{,}0076/15 \simeq 0{,}0005$.

Следовательно, искомый интеграл равен приближенно

$$I \approx 0{,}208$$

с ошибкой не более 0,004, или $I=0{,}21$ со всеми верными знаками.