§ 8.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Если функция $f(x)$ определена при $a \leqslant x < b$, интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < b-a$ и неограничена слева от точки b, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*. В противном случае интеграл называется *расходящимся*.

Аналогично, если функция $f(x)$ неограничена справа от точки a, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Наконец, если функция в окрестности внутренней точки c отрезка $[a, b]$ неограничена, то по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, за исключением конечного числа точек. Если существует функция $F(x)$, непрерывная на $[a, b]$, для которой $F'(x) = f(x)$, кроме конечного числа точек, то имеет место формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Функция $F(x)$ иногда называется *обобщенной первообразной* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Для функций, определенных и положительных на промежутке $a \leqslant x < b$, справедливы признаки сходимости (признаки сравнения), аналогичные признакам сравнения для несобственных интегралов с бесконечными пределами.

Признак сравнения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $a \leqslant x < b$ и интегрируемы на каждом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < b-a$. Если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, причем $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$; из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$.

Частный признак сравнения. Если функция $f(x) \geqslant 0$ определена и непрерывна на промежутке $a \leqslant x < b$ и является бесконечно большой порядка λ по сравнению с $1/(b-x)$ при $x \to b-0$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geqslant 1$.

В частности, интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$$

сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geqslant 1$.

Признак абсолютной сходимости. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $a \leqslant x < b$ и интегрируема на каждом отрезке $[a, b-\varepsilon]$; тогда из сходимости интеграла $\int_a^b |f(x)|\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

В этом случае интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся.* Если же интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *условно сходящимся.*

Аналогичные признаки справедливы и для несобственных интегралов $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$ неограничена справа от точки a.

8.2.1. Исходя из определения, вычислить следующие несобственные интегралы (или доказать их расходимость):

а) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; б) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$;

в) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$; г) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$;

д) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$; е) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$.

Решение. а) Подынтегральная функция $f(x) = 1/(x\sqrt[3]{\ln x})$ неограничена в окрестности точки $x=1$. На любом же отрезке $[1+\varepsilon, e]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Поэтому

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_{1+\varepsilon}^e\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right] = \frac{3}{2}.$$

б) Подынтегральная функция $f(x) = 1/\cos x$ неограничена в окрестности точки $x=\pi/2$ и интегрируема на любом отрезке $[0, \pi/2-\varepsilon]$

как непрерывная функция. Поэтому

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \ln \operatorname{tg}(\pi/2 - \varepsilon/2) = \infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

в) Подынтегральная функция неограничена в окрестности точек $x=1$ и $x=3$. Поэтому, по определению,

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

(вместо точки $x=2$ можно взять любую другую внутреннюю точку отрезка $[1, 3]$). Вычислим теперь каждое слагаемое в отдельности:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin(x-2)\Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} [0 - \arcsin(\varepsilon - 1)] = \pi/2;$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin(x-2)\Big|_2^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} [\arcsin(1-\varepsilon) - 0] = \pi/2.$$

Следовательно,

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

г) Подынтегральная функция $f(x) = 1/\sqrt{|1-x^2|}$ неограничена в окрестности точки $x=1$, являющейся внутренней точкой промежутка интегрирования. Поэтому, по определению,

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}.$$

Вычислим каждое слагаемое в отдельности. Если $0 \leqslant x < 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +0} [\arcsin(1-\varepsilon) - 0] = \pi/2.$$

Если $1 < x \leqslant 2$, то

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\ln(2+\sqrt{3}) - \ln\left(1+\varepsilon+\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}\right)\right] = \ln(2+\sqrt{3}).$$

Следовательно,

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$$

д) Представим данный интеграл в виде суммы трех слагаемых, разделив каждый член числителя на $\sqrt[5]{x^3}$,

$$\int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx = \int_0^1 x^{12/5}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^{4/15}} - 2\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/5}}.$$

Первое слагаемое есть собственный интеграл, вычисляемый по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int_0^1 x^{12/5}\,dx = \frac{5}{17} x^{17/5}\Big|_0^1 = \frac{5}{17}.$$

Второе и третье слагаемые неограничены справа от точки $x=0$. Поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{4/15}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^{4/15}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{15}{11} x^{11/15}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{15}{11};$$

аналогично,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/5}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^{3/5}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{5}{2} x^{2/5}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{5}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx = \frac{5}{17} + \frac{15}{11} - 2\cdot\frac{5}{2} = -\frac{625}{187}.$$

е) Представим подынтегральную функцию $f(x) = 1/(1-x^3)$ в виде суммы простых дробей:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{x+2}{1+x+x^2}\right].$$

Тогда $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x}+\frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{x+2}{1+x+x^2}\,dx$. Так как

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x}=-\lim_{\varepsilon\to+0}\ln(1-x)\Big|_0^{1-\varepsilon}=\infty,$$

то данный интеграл расходится. Второе слагаемое, представляющее собой собственный интеграл, вычислять не нужно.

Замечание. Вычисление несобственных интегралов в предыдущих примерах можно значительно упростить, используя обобщенную первообразную и применяя формулу Ньютона—Лейбница. Например, в задаче **8.2.1** а) функция $F(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}$ непрерывна на отрезке $[1, e]$ и дифференцируема в каждой точке промежутка $1<x\leqslant e$, причем $F'(x)=f(x)$ на этом промежутке. Поэтому

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_1^e=\frac{3}{2}.$$

8.2.2. Исходя из определения, вычислить следующие несобственные интегралы (или доказать их расходимость):

а) $\int\limits_0^{3a} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{2/3}}$; б) $\int\limits_0^{2/\pi} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$;

в) $\int\limits_0^1 \cos\frac{\pi}{1-x}\cdot\frac{dx}{(1-x)^2}$; г) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$;

д) $\int\limits_{-1}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; е) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln^p x}$.

8.2.3. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int\limits_{-3}^3 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$; б) $\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$.

Решение. а) Найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3}-x\sqrt{9-x^2}\right)+C.$$

Функция $F(x)=\frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3}-x\sqrt{9-x^2}\right)$ является обобщенной первообразной для $f(x)=x^2/\sqrt{9-x^2}$ на отрезке $[-3, 3]$, так как непрерывна на этом отрезке и $F'(x)=f(x)$ в каждой точке промежутка $(-3, 3)$. Поэтому, применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\int_{-3}^{3} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3} - x\sqrt{9-x^2}\right)\Big|_{-3}^{3} = \frac{9}{2}\pi.$$

б) Преобразуем подынтегральное выражение

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Неопределенный интеграл равен

$$\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + C.$$

Функция $F(x) = 2\arcsin(x/2) - \sqrt{4-x^2}$ является обобщенной первообразной для $f(x)$ на отрезке $[0, 2]$, так как она непрерывна на этом отрезке и $F'(x) = f(x)$ в промежутке $[0, 2)$.

Поэтому, применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\int_{0}^{2} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx = \left(2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}\right)\Big|_{0}^{2} = \pi + 2.$$

8.2.4. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}.$$

Решение. В точке $x=0$ подынтегральная функция обращается в бесконечность. Оба интеграла $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ и $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ расходятся, так как $\lambda = 4/3 > 1$. Следовательно, данный интеграл расходится. Если бы, не обратив на это внимания, мы формально применили формулу Ньютона—Лейбница к этому интегралу, то получили бы неверный результат:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} = \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)\Big|_{-1}^{1} = -6.$$

8.2.5. Исследовать сходимость следующих несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$; б) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}\,dx.$

Решение. а) Подынтегральная функция является бесконечно большой при $x \to +0$. Так как при $x \to +0$

$$\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \sim \frac{\sqrt{2}}{2} x,$$

то подынтегральная функция имеет порядок $\lambda = 1$ по сравнению с $1/x$. По частному признаку сравнения данный интеграл расходится.

б) Запишем подынтегральную функцию следующим образом:

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1+x+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{1-x}}.$$

Эта функция является бесконечно большой при $x \to 1$, причем ее порядок по сравнению с $1/(1-x)$ равен $\lambda = 1/5$, так как первый множитель стремится к 1 при $x \to 0$. Поэтому по частному признаку сравнения данный интеграл сходится.

8.2.6. Исследовать сходимость следующих несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1} dx$; б) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}} dx$;

в) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[4]{x} - \sin x}$.

Решение. а) Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1}$ положительна в интервале (0, 2) и не определена при $x = 0$. Покажем, что $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \infty$. Действительно, поскольку

$$e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x, \quad \ln(1+\sqrt[5]{x^3}) \sim \sqrt[5]{x^3} \quad \text{при } x \to 0,$$

то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \infty.$$

Одновременно мы показали, что $f(x) \sim 1/\sqrt[5]{x^2}$ при $x \to 0$, т. е. что $f(x)$ является бесконечно большой порядка $\lambda = 2/5 < 1$ по сравнению с $1/x$. Следовательно, по частному признаку сравнения заданный интеграл сходится.

б) Определим порядок бесконечно большой функции $f(x) = \sqrt{x^2+1}/\sqrt[3]{16-x^4}$ в окрестности точки $x = 2$ относительно $1/(2-x)$. Для этого преобразуем выражение для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{4+x^2}\sqrt[3]{2+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}.$$

Отсюда видно, что функция $f(x)$ при $x \to 2$ является бесконечно большой порядка $\lambda = 1/3 < 1$. По частному признаку сравнения данный интеграл сходится.

в) Подынтегральная функция $f(x) = (\cos x)/\left(\sqrt[4]{x} - \sin x\right)$ неограничена в окрестности точки $x = 0$. Так как

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x} - \sin x} = \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}\left(1 - (\sin x)/\sqrt[4]{x}\right)} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \qquad (x \to +0),$$

то при $x \to +0$ функция $f(x)$ является бесконечно большой порядка $\lambda = 1/4 < 1$ по сравнению с $1/x$ и по частному признаку сравнения интеграл сходится.

8.2.7. Исследовать сходимость следующих несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$;

в) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}}\,dx$; г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3+x^5}$;

д) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$; е) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}{e^{\operatorname{tg} x}-1}\,dx$.

8.2.8. Доказать, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

сходится.

Решение. Для $0 < x \leqslant 1$

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Но интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, поэтому по признаку сравнения сходится и интеграл $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| dx$, а следовательно, сходится, и притом абсолютно, заданный интеграл.

8.2.9. Установить сходимость интеграла

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$$

и вычислить его.

Решение. Интегрируем по частям, полагая $u=\ln(\sin x)$, $dx=dv$; получим

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx = x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=1$, $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=0$, то последний интеграл является собственным. Следовательно, исходный интеграл сходится.

Сделаем теперь в интеграле I подстановку $x=2t$. Тогда $dx=2dt$; $x=0$ при $t_1=0$; $x=\pi/2$ при $t_2=\pi/4$. После подстановки получим:

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/4}\ln\sin 2t\,dt = 2\int_0^{\pi/4}(\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t)\,dt =$$

$$= 2t\ln 2\Big|_0^{\pi/4} + 2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt.$$

В последнем интеграле сделаем подстановку $t=\pi/2-z$. Тогда $dt=-dz$; $t=0$ при $z_1=\pi/2$; $t=\pi/4$ при $z_2=\pi/4$. Следовательно,

$$2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt = -2\int_{\pi/2}^{\pi/4}\ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)dz = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin z\,dz.$$

Таким образом,

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin z\,dz =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I.$$

Отсюда

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

8.2.10. Вычислить интеграл

$$\int_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (n \text{ — натуральное число}).$$

Решение. Подынтегральная функция является бесконечно большой порядка $\lambda=1/2$ по сравнению с $1/(1-x)$ при $x\to 1-0$. Поэтому интеграл сходится.

Сделаем в интеграле подстановку $x=\sin t$. Тогда $dx=\cos t\,dt$, $x=0$ при $t=0$, $x=1$ при $t=\pi/2$. После подстановки получим

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n t\cdot\cos t\,dt}{\cos t}=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt.$$

Последний интеграл вычислен в задаче **6.6.9**:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ — четно},\\[2mm] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}, & n\text{ — нечетно}.\end{cases}$$

Следовательно, и заданный интеграл вычисляется по той же формуле.

8.2.11. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{x\ln x}$; б) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

в) $\displaystyle\int_0^1\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

8.2.12. Вычислить несобственный интеграл

$$I_n=\int_0^1 x^m\ln^n x\,dx \qquad (n\text{ — натуральное число, } m>-1).$$

Решение. При $n=0$ интеграл вычисляется непосредственно:

$$I_0=\int_0^1 x^m\,dx=\left.\frac{x^{m+1}}{m+1}\right|_0^1=\frac{1}{m+1}.$$

При $n>0$ проинтегрируем I_n по частям, полагая

$$u=\ln^n x; \qquad dv=x^m\,dx;$$
$$du=n\ln^{n-1}x\,\frac{dx}{x}; \qquad v=\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Мы получим

$$I_n=\left.\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x\right|_0^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m\ln^{n-1}x\,dx=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}.$$

Это дает рекуррентную формулу, с помощью которой можно привести I_n к I_0 при любом натуральном n:

$$I_n=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}=+\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}I_{n-2}=\ldots=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}I_0.$$

И окончательно,

$$I_n=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

8.2.13. Вычислить с точностью до 0,03 интеграл

$$I=\int_{0,3}^{2,0}\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}.$$

Решение. Интеграл имеет особенность в точке $x=2$, так как $2+x-x^2=(2-x)(1+x)$. Представим его в виде суммы двух интегралов:

$$I_1=\int_{0,3}^{2-\varepsilon}\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}},\qquad I_2=\int_{2-\varepsilon}^{2}\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}},$$

первый из которых вычислим с нужной точностью, а второй оценим. При $\varepsilon\leqslant 0,1$ имеем

$$0<I_2<\frac{e^{-1,9}}{\sqrt[4]{2,9}}\int_{2-\varepsilon}^{2}\frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}}=0,115\cdot\frac{4}{3}\varepsilon^{3/4}=0,153\varepsilon^{3/4}.$$

Положив $\varepsilon=0,1$, получим оценку $I_2<0,028$.

Вычисление интеграла

$$I_1=\int_{0,3}^{1,9}\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

по формуле Симпсона с шагом $h=0,8$ дает

$$S_{0,8}=0,519,$$

а с шагом $h/2=0,4$ дает

$$S_{0,4}=0,513.$$

Отсюда видно, что более точное значение 0,513 дает интеграл I_1 с ошибкой не более 0,001. Учитывая положительность интеграла I_2, округляем полученное значение в бо́льшую сторону и получаем

$$I\approx 0,52$$

с ошибкой не более 0,03.

Замечание. Положив $\varepsilon=0,01$, мы получили бы оценку $I_2<0,005$, но вычисление интеграла

$$I_1=\int_{0,3}^{1,99}\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

потребовало бы значительно более громоздкого расчета.

8.2.14. Исследовать сходимость следующих интегралов:

а) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$; б) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{e^x-\cos x}$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x\,dx}{(1-x)^2}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

д) $\int\limits_{1/2}^{6/5} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

§ 8.3. Геометрические и физические приложения несобственных интегралов

8.3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=1/(1+x^2)$ (локон Аньези) и ее асимптотой.

Решение. Функция $y=1/(1+x^2)$ непрерывна на всей числовой оси, причем $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$. Следовательно, ось Ox является асимптотой заданной кривой, которая изображена на рис. 118. Требуется найти площадь S фигуры, простирающейся неограниченно вдоль оси Ox. Другими словами, требуется вычислить несобственный интеграл

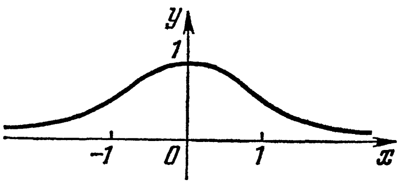

Рис. 118.

$$S=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

В силу симметрии фигуры относительно оси Oy имеем

$$S=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\lim_{A\to\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^A=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

8.3.2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=e^{-x}$ от $x=0$ до $x=+\infty$.

Решение. Площадь поверхности равна несобственному интегралу

$$S=2\pi\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx.$$

Сделав подстановку $e^{-x}=t$, $dt=-e^{-x}\,dx$, получим $x=0$ при $t=1$, $x=\infty$ при $t=0$; отсюда

$$S=2\pi\int\limits_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt=2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^1=$$

$$=\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$