в) $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x\,dx}{(1-x)^2}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

д) $\int\limits_{1/2}^{6/5} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

§ 8.3. Геометрические и физические приложения несобственных интегралов

8.3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=1/(1+x^2)$ (локон Аньези) и ее асимптотой.

Решение. Функция $y=1/(1+x^2)$ непрерывна на всей числовой оси, причем $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$. Следовательно, ось Ox является асимптотой заданной кривой, которая изображена на рис. 118. Требуется найти площадь S фигуры, простирающейся неограниченно вдоль оси Ox. Другими словами, требуется вычислить несобственный интеграл

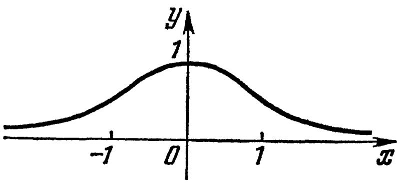

Рис. 118.

$$S=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

В силу симметрии фигуры относительно оси Oy имеем

$$S=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\lim_{A\to\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^A=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

8.3.2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=e^{-x}$ от $x=0$ до $x=+\infty$.

Решение. Площадь поверхности равна несобственному интегралу

$$S=2\pi\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx.$$

Сделав подстановку $e^{-x}=t$, $dt=-e^{-x}\,dx$, получим $x=0$ при $t=1$, $x=\infty$ при $t=0$; отсюда

$$S=2\pi\int\limits_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt=2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^1=$$

$$=\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

8.3.3. Вычислить площадь петли декартова листа

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Решение. Декартов лист изображен на рис. 86. От неявного задания кривой перейдем к заданию в полярных координатах

$$x=\rho\cos\varphi;\qquad y=\rho\sin\varphi.$$

Тогда $\rho^3\cos^3\varphi+\rho^3\sin^3\varphi-3a\rho^2\cos\varphi\sin\varphi=0$, откуда, после сокращения на ρ^2, получим

$$\rho=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}.$$

Так как петля кривой отвечает изменению φ от 0 до $\pi/2$, то искомая площадь равна

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\rho^2\,d\varphi=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Для вычисления полученного собственного интеграла сделаем подстановку $\operatorname{tg}\varphi=t;(d\varphi)/\cos^2\varphi=dt$; $\varphi=0$ при $t=0$, $\varphi=\pi/2$ при $t=\infty$. Подставив, получим

$$S=\frac{9a^2}{2}\int_0^\infty\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}=\frac{9a^2}{2}\lim_{A\to\infty}\int_0^A\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}=$$

$$=-\frac{3a^2}{2}\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{1+t^3}\right]_0^A=\frac{3}{2}a^2.$$

8.3.4. Найти объем тела, образованного вращением циссоиды $y^2=x^3/(2a-x)$ вокруг ее асимптоты $x=2a$.

Решение. Циссоида изображена на рис. 119. Перенесем начало координат, не изменяя направление осей, в точку $O'(2a, 0)$. В новых координатах $X=x-2a$; $Y=y$ уравнение циссоиды примет следующий вид:

$$Y^2=\frac{(X+2a)^3}{-X}.$$

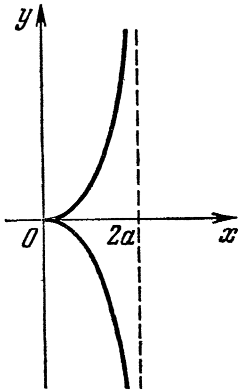

Рис. 119.

Объем тела вращения вокруг оси $X=0$, т. е. вокруг асимптоты, выразится интегралом

$$V=\pi\int_{-\infty}^{\infty}X^2dY=2\pi\int_0^\infty X^2dY.$$

Перейдем к переменной X. С этой целью найдем $dY=Y'dX$. Дифференцируя уравнение циссоиды в новых координатах как тождество по X, получим

$$2YY'=-\frac{3(X+2a)^2X-(X+2a)^3}{X^2}=-\frac{2(X+2a)^2(X-a)}{X^2};$$

отсюда при $Y>0$ имеем

$$Y' = -\frac{(X+2a)^2(X-a)}{X^2Y} = -\frac{(X+2a)(X-a)}{X^2\sqrt{-(X+2a)/X}}.$$

Следовательно,

$$V = -2\pi\int_{-2a}^{0}\frac{(X+2a)(X-a)}{\sqrt{-(X+2a)/X}}\,dX.$$

Сделаем подстановку $(X+2a)/X = -t^2$; $X=-2a$ при $t=0$, $X=0$ при $t=\infty$. Далее:

$$X = -\frac{2a}{1+t^2};\quad dX = \frac{4at}{(1+t^2)^2}dt;\quad X+2a = \frac{2at^2}{1+t^2};$$
$$X-a = -\frac{3a+at^2}{1+t^2};$$

отсюда

$$V = 2\pi\int_0^\infty\frac{2at^2(3a+at^2)\,4at\,dt}{t(1+t^2)(1+t^2)(1+t^2)^2} =$$
$$= 48\pi a^3\int_0^\infty\frac{t^2}{(1+t^2)^4}dt + 16\pi a^3\int_0^\infty\frac{t^4}{(1+t^2)^4}dt.$$

Полагая $t=\operatorname{tg} z$, $dt=\sec^2 z\,dz$, получим $t=0$ при $z=0$, $t=\infty$ при $z=\pi/2$. Следовательно,

$$V = 48\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin^2 z\cos^4 z\,dz + 16\pi a^3\int_0^{\pi/2}\cos^2 z\sin^4 z\,dz =$$
$$= 48\pi a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4 z\,dz - 48\pi a^3\int_0^{\pi/2}\cos^6 z\,dz +$$
$$+ 16\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin^4 z\,dz - 16\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin^6 z\,dz.$$

Используя известные формулы для интегралов $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$, $\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$ (см. **6.6.9**), получим

$$V = 64\pi a^3\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} - 64\pi a^3\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} = 2\pi^2 a^3.$$

8.3.5. Доказать, что площадь области, заключенной между кривой $y=1/\sqrt{1-x^2}$, осью абсцисс, осью ординат и асимптотой $x=1$, конечна и равна $\pi/2$.

8.3.6. Доказать, что площадь области, заключенной между кривой $y=1/\sqrt[3]{x^2}$, осью абсцисс и прямыми $x=\pm 1$, конечна и равна 6, а площадь области, заключенной между кривой $y=1/x^2$, осью абсцисс и прямыми $x=\pm 1$, бесконечна.

8.3.7. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении линий $y=e^{-x}$, $x=0$, $y=0$ $(0 \leqslant x < +\infty)$:

а) вокруг оси Ox,

б) вокруг оси Oy.

8.3.8. Вычислить площадь, заключенную между циссоидой $y^2=x^3/(2a-x)$ и ее асимптотой.

8.3.9. Вычислить площадь, заключенную между кривой $y=e^{-2x}$ (при $x>0$) и осями координат.

8.3.10. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox бесконечной ветви кривой $y=2(1/x-1/x^2)$ при $x \geqslant 1$.

8.3.11. Пусть в начале координат O находится масса m, которая притягивает материальную точку M, находящуюся на оси Ox на расстоянии x от O и имеющую массу 1, с силой $F=m/x^2$ (по закону Ньютона). Какую работу A произведет сила F при перемещении точки M вдоль оси Ox из положения, отвечающего $x=r$, в бесконечность?

Решение. Работа, очевидно, будет отрицательной, так как направление силы противоположно направлению движения; отсюда

$$A=\int_r^{\infty} -\frac{m}{x^2}\,dx=\lim_{N\to\infty}\int_r^{N} -\frac{m}{x^2}\,dx=-\frac{m}{r}.$$

При обратном перемещении точки M из бесконечности в точку $x=r$ сила ньютоновского притяжения произведет положительную работу m/r; эта величина называется *потенциалом* рассматриваемой силы в точке $x=r$ и служит мерой накопления в точке потенциальной энергии.

8.3.12. При исследовании затухающего тока, получающегося при разряде, иногда применяются «баллистические» приборы, показания которых пропорциональны не мгновенному значению силы тока I или ее квадрату I^2, а «интегральной силе тока» $g=\int_0^{\infty} I\,dt$ или «интегральному квадрату силы тока» $S=\int_0^{\infty} I^2\,dt$. Здесь t — время, отсчитываемое от начала разряда; I — сила переменного тока, зависящая от времени. Процесс теоретически продолжается бесконечно, хотя практически уже через конечный промежуток времени сила тока становится неощутимой; при расчете промежуток времени считают бесконечным в целях упрощения формул.

Вычислить g и S для следующих процессов:

а) $I=I_0e^{-kt}$ (простой апериодический процесс); k — постоянный коэффициент, больший нуля.

б) $I = I_0 e^{-kt} \sin \omega t$ (простой колебательный процесс); коэффициенты k и ω постоянны.

Решение.

$$\text{а)}\quad g = \int_0^\infty I_0 e^{-kt}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A I_0 e^{-kt}\, dt = I_0 \lim_{A\to\infty} \left[-e^{-kt}/k\right]_0^A = I_0/k;$$

$$S = \int_0^\infty I_0^2 e^{-2kt}\, dt = \frac{I_0^2}{2k};$$

$$\text{б)}\quad g = \int_0^\infty I_0 e^{-kt} \sin \omega t\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A I_0 e^{-kt} \sin \omega t\, dt =$$

$$= \frac{I_0}{\omega^2 + k^2} \lim_{A\to\infty} \left[(\omega \cos \omega t + k \sin \omega t)\, e^{-kt}\right]_0^A = \frac{I_0 \omega}{\omega^2 + k^2};$$

$$S = \int_0^\infty I_0^2 e^{-2kt} \sin^2 \omega t\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A I_0^2 e^{-2kt}\, \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}\, dt =$$

$$= -\frac{I_0^2}{4k} \lim_{A\to\infty} \left[1 - \frac{1}{\omega^2 + k^2}(k^2 \cos 2\omega t + \omega k \sin 2\omega t)\right] e^{-2kt} \Big|_0^A =$$

$$= \frac{I_0^2 \omega^2}{4k(k^2 + \omega^2)}.$$

8.3.13. Пусть бесконечная (в обе стороны) балка, лежащая на упругом основании, изгибается сосредоточенной силой P. Если совместить ось Ox с первоначальным положением оси балки (до изгиба), а ось Oy провести через точку O приложения силы и направить вниз, то после изгиба ось балки будет иметь уравнение

$$y = \frac{P\alpha}{2k} e^{-\alpha|x|} (\cos \alpha x + \sin \alpha |x|),$$

где α и k — некоторые постоянные. Вычислить потенциальную энергию упругой деформации по формуле

$$W = Ee \int_0^\infty (y'')^2\, dx \qquad (E,\ e \text{ — const}).$$

Решение. Найдем y'':

$$y'' = \frac{P\alpha^3}{k} e^{-\alpha x} \left[(\cos \alpha x + \sin \alpha x) - 2(-\sin \alpha x + \cos \alpha x) + \right.$$

$$\left. + (-\sin \alpha x - \cos \alpha x)\right] = \frac{P\alpha^3}{k} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x).$$

Отсюда

$$W = \frac{P^2 \alpha^6 Ee}{k^2} \int_0^\infty e^{-2\alpha x} (1 - 2 \sin \alpha x \cos \alpha x)\, dx =$$

$$= \frac{P^2 \alpha^6 Ee}{k^2} \left[\frac{1}{2\alpha} - \frac{2\alpha}{4\alpha^2 + 4\alpha^2}\right] = \frac{P^2 \alpha^5 Ee}{4k^2}.$$

8.3.14. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m перенести в бесконечность с поверхности Земли?

8.3.15. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы электрический заряд $e_2 = 1$ приблизить к заряду e_1 из бесконечности на расстояние, равное единице.

§ 8.4. Дополнительные задачи

8.4.1. Доказать, что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

сходится при $p > 1$ и $q < 1$.

8.4.2. Доказать, что интеграл

$$\int_0^\infty x^p \sin x^q \, dx, \qquad q \neq 0$$

сходится абсолютно при $-1 < (p+1)/q < 0$ и сходится условно при $0 \leqslant (p+1)/q < 1$.

8.4.3. Доказать, что эйлеров интеграл первого рода (бэта-функция)

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx$$

сходится при $p > 0$ и $q > 0$.

8.4.4. Доказать, что

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx = 0,$$

если $|\alpha| \neq |\beta|$.

8.4.5. Доказать, что

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot x^{2n+1} \, dx = \frac{n!}{2} \qquad (n \text{ — натуральное число}).$$

8.4.6. Доказать, что если интеграл $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ сходится при любом положительном значении a и если $f(x)$ стремится к пределу A при $x \longrightarrow 0$, то интеграл

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx \qquad (\alpha > 0, \quad \beta > 0)$$

сходится и равен $A \ln(\beta/\alpha)$.