

8.3.14. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m перенести в бесконечность с поверхности Земли?

8.3.15. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы электрический заряд $e_2 = 1$ приблизить к заряду e_1 из бесконечности на расстояние, равное единице.

§ 8.4. Дополнительные задачи

8.4.1. Доказать, что интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

сходится при $p > 1$ и $q < 1$.

8.4.2. Доказать, что интеграл

$$\int_0^{\infty} x^p \sin x^q dx, \quad q \neq 0$$

сходится абсолютно при $-1 < (p+1)/q < 0$ и сходится условно при $0 \leq (p+1)/q < 1$.

8.4.3. Доказать, что эйлеров интеграл первого рода (бэта-функция)

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

сходится при $p > 0$ и $q > 0$.

8.4.4. Доказать, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx = 0,$$

если $|\alpha| \neq |\beta|$.

8.4.5. Доказать, что

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2n+1} dx = \frac{n!}{2} \quad (n - \text{натуральное число}).$$

8.4.6. Доказать, что если интеграл $\int_a^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ сходится при любом положительном значении a и если $f(x)$ стремится к пределу A при $x \rightarrow 0$, то интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

сходится и равен $A \ln(\beta/\alpha)$.

8.4.7. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

8.4.8. При каких значениях m интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x^m} dx$ сходится?

8.4.9. Доказать, что интеграл $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^k}$ сходится, если $k < 1$, и расходится, если $k \geq 1$.

8.4.10. Доказать, что интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^s} dx$ сходится, если $0 < s < 4$, и абсолютно сходится, если $1 < s < 4$.

8.4.11. Пусть интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

сходится и функция $\varphi(x)$ ограничена.

Обязательно ли сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx? \quad (2)$$

Что можно сказать о сходимости интеграла (2), если интеграл (1) сходится абсолютно?

8.4.12. Доказать справедливость соотношения

$$f(x) = 2f(\pi/4 + x/2) - 2f(\pi/4 - x/2) - x \ln 2,$$

где $f(x) = - \int_0^x \ln \cos y dy$.

Вычислить с помощью найденного соотношения

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = - \int_0^{\pi/2} \ln \cos y dy.$$

8.4.13. Для интеграла

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \cdot \cos 2n x dx \quad (n - \text{натуральное})$$

вывести рекуррентную формулу и вычислить этот интеграл.