ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

К главе I

1.1.5. *Указание.* Доказывать от противного, полагая $2=p^2/q^2$, где p, q — целые положительные числа без общих множителей.

1.1.8. *Указание.* Можно взять $k=(s^2-2)/2s$.

1.1.9. б) $x \geqslant 4$, $x \leqslant 0$; в) $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

1.1.11. а) $x<-1$ или $x \geqslant 1$. *Указание.* Равенство справедливо для тех значений x, для которых $(x-1)/(x+1) \geqslant 0$; б) $2 \leqslant x \leqslant 3$. *Указание.* Равенство справедливо для тех значений x, для которых $x^2-5x+6 \leqslant 0$.

1.1.13. а) $x<2/5$ или $x>8$; б) $x<0$ или $0<x<5$. *Указание.* Неравенство $|a-b|>|a|-|b|$ имеет место тогда, когда числа a и b разных знаков или когда $|a|<|b|$.

1.2.3. 0; $(a+2)/[a(a^2+3a+3)]$; $(a^3+a)(a^3-1)$. **1.2.4.** b^2+ab+a^2; $(a+h)^3/8-1$. **1.2.6.** $4\sqrt{2}+1$; $(\sqrt{2}+1)/2$; $2\sqrt{10}-5$. **1.2.11.** $f(x)=10+5\cdot 2^x$.

1.2.13. $f(3x)=\dfrac{45x^2+1}{2-3x}$; $\quad f(x^3)=\dfrac{5x^6+1}{2-x^3}$;

$$3f(x)=\frac{15x^2+3}{2-x}; \quad [f(x)]^3=\frac{125x^6+75x^4+15x^2+1}{8-12x+6x^2-x^3}.$$

1.2.14. $f(2)=5$; $f(0)=4$; $f(0{,}5)=4$; $f(-0{,}5)=\sqrt{3}/3$; $f(3)=8$.

1.2.15. *Указание.* Из $x_{n+1}=x_n+d$ следует $y_{n+1}=a^{x_{n+1}}=a^{x_n+d}=a^{x_n}a^d$. **1.2.16.** $x=\pm 2$; ± 3. **1.2.17.** $f(x)=x^2-5x+6$. **1.2.18.** $f(x)=23$; $\varphi(x)=527$. **1.2.19.** $x \leqslant -1$ или $x \geqslant 2$. **1.2.20.** $P=2b+2(1-b/h)x$; $S=b(1-x/h)x$.

1.2.21. б) $(2, 3)$; в) $(-\infty, -1)$ и $(2, \infty)$; г) $x=\pi/2+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. *Указание.* Так как $\sin x \leqslant 1$, то функция определена лишь тогда, когда $\sin x=1$; ж) $(-\infty, 2)$ и $(3, \infty)$; з) $[1, 4)$; и) $(-2, 0)$ и $(0, 1)$; к) $-\pi/2+2k\pi<x<\pi/2+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1.2.22. г) Вся числовая ось, кроме точек $x=\pm 2$.

1.2.24. а) $(-\infty, \infty)$; б) $(3-2\pi, 3-\pi)$ и $(3, 4)$; в) $[-1, 3]$; г) $(-1, 0)$ и $(0, \infty)$. **1.2.25.** б) $5 \leqslant x \leqslant 6$.

1.2.26. а) $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; б) $[-3/2, -1]$.

1.3.3. б) *Указание.* Рассмотреть разность $x_2/(1+x_2^2)-x_1/(1+x_1^2)$.

1.3.4. б) Возрастает при $-5\pi/6+k\pi<x<\pi/6+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и убывает в остальных промежутках.

1.3.7. Функция убывает в промежутке $0<x \leqslant \pi/4$ от $+\infty$ до 2 и возрастает в промежутке $\pi/4 \leqslant x<\pi/2$ от 2 до $+\infty$.

1.3.9. в) Функция не является ни четной, ни нечетной; г) четная.

1.3.10. а) Четная; б) нечетная; в) нечетная; г) не является ни четной, ни нечетной; д) четная.

1.3.12. а) $|A|=5$, $\omega=4$, $\varphi=0$, $T=\pi/2$; б) $|A|=4$, $\omega=3$, $\varphi=\pi/4$, $T=2\pi/3$; в) $|A|=5$, $\omega=1/2$, $\varphi=\operatorname{arctg}(4/3)$, $T=4\pi$. *Указание.* $3\sin(x/2)+4\cos(x/2)=5\sin(x/2+\varphi)$, где $\cos\varphi=3/5$, $\sin\varphi=4/5$. **1.3.13.** б) $T=2\pi$; в) $T=1$.

1.3.16. Наибольшее значение $f(1)=2$. *Указание.* Функция достигает наибольшего значения в точке, где квадратный трехчлен $2x^2-4x+3$ достигает наименьшего значения.

1.3.17. а) Четная; б) четная; в) нечетная; г) четная.

1.3.18. а) $T=\pi$; б) $T=6\pi$.

1.3.19. *Указания.* а) Предположить противное. Тогда

$$x+T+\sin(x+T)=x+\sin x,$$

откуда $\cos(x+T/2)=-\dfrac{T}{2\sin(T/2)}$, что невозможно ни при каком постоянном T, так как левая часть не является постоянной; б) предположить противное. Тогда $\cos\sqrt{x+T}=\cos\sqrt{x}$, откуда либо $\sqrt{x+T}+\sqrt{x}=2\pi k$, либо $T/(\sqrt{x+T}+\sqrt{x})=2\pi k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), что невозможно, так как левые части этих равенств являются функциями непрерывного аргумента x.

1.4.6. а) $x=(1+\arcsin y)/3$; б) $x=3\sin y$; в) $x=y^{1/\lg 5}$ $(y>0)$; г) $x=\dfrac{\log_2 y}{\log_2 y-1}=\dfrac{\lg y}{\lg(y/2)}$ $(0<y<2$ или $2<y<\infty)$.

1.6.3. а) $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/2$, 0, $-\sqrt{3}/2$, ...; б) $-1/2$, $1/4$, $-1/8$, $1/16$, ...; в) 2; 2,25; $2\dfrac{10}{27}$; $2\dfrac{113}{256}$, ...

1.6.9. *Указание.* Неравенство $|(2n+3)/(n+1)-2|<\varepsilon$ удовлетворяется при $n>N=E(1/\varepsilon-1)$. При $\varepsilon=0,1$ неравенство удовлетворяется, начиная с $n=10$, при $\varepsilon=0,01$, начиная с $n=100$, при $\varepsilon=0,001$, начиная с $n=1000$.

1.6.10. *Указание.* Убедиться, что последовательность x_{2n-1} стремится к 1 при $n\to\infty$, а последовательность x_{2n} стремится к 0 при $n\to\infty$.

1.6.12. а) Имеет; б) не имеет; в) имеет; г) не имеет.

1.6.14. *Указание.* а) $|x_n|\leqslant 2/n$; б) $|x_n|\leqslant 1/n$.

1.6.19. *Указание.* При $a>1$ положить $\sqrt[n]{a}=1+\alpha_n$ $(\alpha_n>0)$ и с помощью неравенства $a=(1+\alpha_n)^n>n\alpha_n$ доказать, что α_n — бесконечно малая. При $a<1$ положить $\sqrt[n]{a}=1/(1+\alpha_n)$ $(\alpha_n>0)$ и воспользоваться неравенством $1/a=(1+\alpha_n)^n>n\alpha_n$.

1.7.1. б) 5/4; в) 0; д) 1/2. **1.7.2.** б) 1/16; д) 1; е) 1.

1.7.4. б) 1; е) 0. *Указание.* Умножить и разделить на неполный квадрат суммы, а затем разделить на $n^{4/3}$; ж) $-1/3$; з) 1. *Указание.* Представить каждое слагаемое в x_n в виде разности

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\quad \ldots;\quad \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

что приведет x_n к виду $x_n=1-1/(n+1)$.

1.7.5. а) 1/2; б) 1; в) 0; г) $-1/2$. *Указание.* Величина $1/(2n)$ — бесконечно малая, а $\cos n^3$ — ограниченная; д) 0; е) 4/3.

1.8.6. б) *Указание.* Ограниченность последовательности вытекает из того, что $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n\geqslant 2^{n-1}$ и поэтому

$$x_n\leqslant 2+1/2+1/2^2+\ldots+1/2^{n-1}=3-1/2^{n-1}<3.$$

1.8.7. б) 0. *Указание.* Воспользоваться тем, что $x_{n+1}/x_n=2/(n+3)<1$.

1.8.9. *Указание.* Для всех n, начиная с некоторого, выполняются неравенства $1/n<a<n$. Поэтому $1/\sqrt[n]{n}<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$, причем $\lim\sqrt[n]{n}=\lim 1/\sqrt[n]{n}=1$.

1.8.10. *Указание.* Последовательность $\{y_n\}$ убывает, так как $y_{n+1}=a^{1/2^{n+1}}=a^{1/(2^n\cdot 2)}=\sqrt{y_n}$ $(y_n>1)$.

Ограниченность последовательности снизу следует из $a>1$. Обозначить $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$ и из соотношения $y_{n+1}=\sqrt{y_n}$ найти $b=1$.

1.8.11. *Указание.* Убедиться, что последовательность возрастает. Ограниченность установить из неравенств

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} \qquad (n\geqslant 2),$$

$$x_n<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}.$$

1.8.12. *Указание.* Преобразовать x_n к виду $x_n=2n/(\sqrt{n^2+1}+n)$ и воспользоваться неравенствами

$$2n/(2n+1)<2n/(\sqrt{n^2+1}+n)<1.$$

1.8.13. *Указание.* См. задачу 1.8.7а).

1.8.14. *Указание.* Ограниченность последовательности установить путем сравнения x_n с суммой некоторой геометрической прогрессии.

1.9.2. б) *Указание.* Выбрать последовательности

$$x_n=1/n \quad \text{и} \quad x'_n=-1/n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

и убедиться в том, что последовательности соответствующих значений функции имеют разные пределы:

$$\lim 2^{1/x_n}=+\infty, \qquad \lim 2^{1/x'_n}=0.$$

1.9.3. д) *Указание.* Воспользоваться неравенством

$$\pi/2-\operatorname{arctg} x<\operatorname{tg}(\pi/2-\operatorname{arctg} x)=1/x \qquad (x>0).$$

е) *Указание.* Преобразовать разность

$$\sin x-1/2=\sin x-\sin(\pi/6)$$

в произведение и воспользоваться неравенством $|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|$.

1.10.1. г) p/q; д) 5/6; е) $-1/12$. *Указание.* Умножить числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы $\left(\sqrt[3]{10-x}+2\right)$; ж) 34/23; з) $\log_a 6$. *Указание.* $\lim\limits_{x\to 3}\left[\log_a \dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\right]=\log_a\left[\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}\right]=\log_a 6$; и) 2/3; к) 7/12.

1.10.2. д) 1/2. *Указание.* После перенесения иррациональности в знаменатель разделить числитель и знаменатель на x.

1.10.3. б) 32; в) 5/3. *Указание.* Положить $x=z^{15}$; е) ∞. *Указание.* Положить $\pi/2-x=z$; $x=\pi/2-z$; $z\to 0$ при $x\to\pi/2$; ж) -3. *Указание.* Положить $\sin x=y$.

1.10.5. б) $e^{1/3}$; в) e^{-1}; г) e^{mk}; е) 4; ж) $1/a$; з) 2.

1.10.7. б) 1/4. **1.10.8.** б) 1; в) $1/e$; г) $e^{\operatorname{ctg} a}$.

1.10.11. а) 1/2; б) $-3/4$; в) 1/2; г) 2/5; д) 0; е) -1.

1.10.12. а) 1/20; б) -2; в) $\pi/2$; г) 1/2; д) -24.

1.10.13. а) e^4; б) -1; в) $2\ln a$; г) e^3; д) $e^{-1/2}$; е) e^{-1}; ж) 1; з) 1; и) 9; к) 1; л) $\alpha-\beta$. *Указание.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0} e^{\beta x}\,\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{x}=\alpha-\beta.$$

1.10.14. а) $\sqrt{2}$. *Указание.* Заменить $\arccos(1-x)=\arcsin\sqrt{2x-x^2}$; б) 1; в) a.

1.11.5. б) Третьего порядка малости. *Указание.*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}=\frac{1}{2}.$$

1.11.6. б) Одного порядка; в) эквивалентны.

1.11.8. а) $100x$ есть бесконечно малая того же порядка, что x; б) x^2 есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с x; в) $6\sin x$ есть бесконечно малая того же порядка, что x; г) $\sin^3 x$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с x; д) $\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$ есть бесконечно малая низшего порядка малости по сравнению с x.

1.11.9. а) 4-го порядка малости; б) 1-го порядка малости; в) 3-го порядка малости; г) 3-го порядка малости; д) 1-го порядка малости; е) порядка малости 1/2; ж) 1-го порядка малости; з) 1-го порядка малости; и) 2-го порядка малости. *Указание.* Умножить и разделить разность $\cos x-\sqrt[3]{\cos x}$ на неполный квадрат суммы; к) 1-го порядка малости.

1.11.10. Диагональ d первого порядка малости; площадь S второго порядка малости; объем V третьего порядка малости.

1.12.3. б) 4; е) 3; ж) 1/2; и) 2. **1.12.6.** а) 1; б) 2. **1.12.7.** а) 1; б) 1/3.

1.12.8. а) 3/5; б) 4/5; в) 3/2; г) 3/2; д) 2/9; е) 3/4; ж) -2; з) 1.

1.12.9. 10,14. *Указание.* $1042=10^3\cdot(1+0{,}042)$.

1.13.1. б) $f(1-0)=-2$, $f(1+0)=2$, е) $f(2-0)=-\infty$; $f(2+0)=+\infty$.
1.13.3. а) $f(-0)=1/2$; $f(+0)=0$; б) $f(-0)=0$, $f(+0)=+\infty$; в) $f(-0)=-1$, $f(+0)=1$.

1.14.2. б) Функция терпит разрыв первого рода в точке $x=3$. Скачок равен 27.

1.14.3. в) Функция непрерывна всюду; д) функция терпит разрыв первого рода в точке $x=0$; скачок равен π. *Указание.* $\operatorname{arctg}(-\infty)=-\pi/2$, $\operatorname{arctg}(+\infty)=+\pi/2$.

1.14.6. б) В точке $x_0=5$ разрыв первого рода: $f(5-0)=-\pi/2$, $f(5+0)=\pi/2$; в) в точке $x_0=0$ разрыв первого рода: $f(-0)=1$, $f(+0)=0$; г) в точке $x_0=\pi/2$ бесконечный разрыв второго рода:

$$f(\pi/2-0)=+\infty,\qquad f(\pi/2+0)=-\infty.$$

1.14.7. а) В точке $x=0$ устранимый разрыв. Для устранения разрыва достаточно доопределить функцию, положив $f(0)=1$; б) в точке $x=0$ устранимый разрыв. Для устранения разрыва достаточно переопределить функцию, положив $f(0)=1$; в) в точке $x=0$ разрыв второго рода: $f(-0)=0$, $f(+0)=+\infty$; г) в точках $x=(2k+1)\pi/2$ ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$) устранимые разрывы, так как

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}(\sin x)^{2n}=\begin{cases}0, & \text{если } |\sin x|<1,\\ 1, & \text{если } |\sin x|=1;\end{cases}$$

д) в точках $x=k\pi$ ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$) разрывы первого рода, так как

$$f(x)=\frac{|\sin x|}{\sin x}\begin{cases}1, & \text{если } \sin x>0,\\ -1, & \text{если } \sin x<0;\end{cases}$$

е) в точках $x=n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ устранимые разрывы, так как

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } x=n,\\ 0, & \text{если } x\neq n.\end{cases}$$

1.14.8. а) В точке $x=1$ бесконечный разрыв второго рода; б) в точке $x=-2$ разрыв первого рода, скачок равен 2; в) в точке $x=0$ бесконечный разрыв второго рода, в точке $x=1$ разрыв первого рода, скачок равен -4; г) в точке $x=1$ бесконечный разрыв второго рода.

1.14.9. а) $f(0)=1$; б) $f(0)=-3/2$; в) $f(0)=1/2$; г) $f(0)=2$.

1.15.2. б) Функция непрерывна в промежутке $(0, +\infty)$.

1.15.3. б) Функция непрерывна всюду. В единственной возможной точке разрыва $x=0$ имеем

$$\lim_{x\to -0} y=\lim_{u\to 1} u^2=1;\qquad \lim_{x\to +0} y=\lim_{u\to -1} u^2=1;\quad y|_{x=0}=y|_{u=-1}=1;$$

в) в точках $x=\pi/2+n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ устранимые разрывы, так как $\lim\limits_{x\to\pi/2} y=\lim\limits_{u\to\pm\infty} y=-1$. **1.16.2.** Да. **1.16.12.** 1,53.

1.16.13. Нет. Например, функция $y=x^2$ на отрезке $[-1, 1]$.

1.17.1. а) *Указание.* Перемножить очевидные неравенства:

$$\begin{aligned}\sqrt{1\cdot n} &< (n+1)/2;\\ \sqrt{2(n-1)} &< (n+1)/2;\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \sqrt{(n-1)\cdot 2} &< (n+1)/2;\\ \sqrt{n\cdot 1} &< (n+1)/2.\end{aligned}$$

б) *Указание.* Пусть $A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$,

$$B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}.$$

Тогда $A<B$, так как $(2n-1)/2n < 2n/(2n+1)$ и $A^2 < AB=1/(2n+1)$.

1.17.2. а) *Указание.* Извлечь из обеих частей неравенства корень 101-й степени и сократить обе части на 101^2.

б) Перемножить очевидные неравенства:

$$\begin{aligned}99\cdot 101 &< 100^2,\\ 98\cdot 102 &< 100^2,\\ &\ldots\ldots\\ 2\cdot 198 &< 100^2,\\ 1\cdot 100\cdot 199\cdot 200 &< 100^4.\end{aligned}$$

1.17.3. а) $-3<x<-1$ или $1<x<3$; б) $x<-1/3$ или $x>5/3$; в) неравенство не имеет решений, так как равносильно противоречивой системе $x-2>0$, $x(4x^2-x+4)<0$. **1.17.4.** Да. **1.17.5.** а) Нет; б) да.

1.17.7. *Указание.* Воспользоваться методом математической индукции. При $n=1$ соотношение очевидно. Предполагая, что справедливо неравенство $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{n-1})\geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}$, умножить обе части его на $1+x_n$ и учесть условия $1+x_n>0$, $x_i\cdot x_n>0$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$.

1.17.8. а) $[1, +\infty)$; б) $(2n\pi)^2\leqslant x\leqslant(2n+1)^2\pi^2$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$; в) $x=0$, ± 1, ± 2, ...; г) $(-\infty, 0)$ для $f(x)$, $g(x)$ не определена нигде; д) $[-4, -2]$ или $[2, 4]$; е) $x=(2n+1)\pi/2$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1.17.9. а) Нет: $\varphi(0)=1$, а $f(0)$ не определена; б) нет: $f(x)$ определена для всех $x\neq 0$, а $\varphi(x)$ — лишь при $x>0$; в) нет: $f(x)$ определена для всех x, а $\varphi(x)$ — лишь для $x\geqslant 0$; г) да; д) нет: $f(x)$ определена только при $x>2$, а $\varphi(x)$ — при $x>2$ и при $x<1$.

1.17.10. а) $(0, \infty)$; б) $[1, \infty)$. **1.17.11.** $V=8\pi(x-3)(6-x)$, $3<x<6$.

1.17.12. а) $x=5$. *Указание.* Область определения задается неравенствами $x+2\geqslant 0$, $x-5\geqslant 0$, $5-x\geqslant 0$, которым удовлетворяет лишь одна точка $x=5$. Проверить, что число $x=5$ удовлетворяет заданному неравенству. б) *Указание.* Область определения задается несовместными неравенствами $x-3>0$, $2-x>0$.

1.17.17. а) $f(x)=2/(1+x^2)+x/(1+x^2)$; б) $a^x=(a^x+a^{-x})/2+(a^x-a^{-x})/2$ (см. задачу **1.17.16**).

1.17.18. Четное продолжение определяет функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x)\ \ =x^2+x & \text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant 3,\\ f(-x)=x^2-x & \text{при}\quad -3\leqslant x<0.\end{cases}$$

Нечетное продолжение определяет функцию

$$\psi(x)=\begin{cases} f(x)\ \ =x^2+x & \text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant 3,\\ -f(-x)=-x^2+x & \text{при}\quad -3\leqslant x<0.\end{cases}$$

1.17.21. *Указание.* Если функция $f(x)$ имеет период T_1, а функция $\varphi(x)$ имеет период T_2, причем $T_1=n_1d$, $T_2=n_2d$ (n_1, n_2 — целые положительные числа), то периодом суммы и произведения этих функций будет $T=nd$, где n — наименьшее общее кратное чисел n_1 и n_2.

1.17.22. *Указание.* При любом рациональном числе r будет

$$\lambda(x+r)=\lambda(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } x \text{ рациональном},\\ 0 \text{ при } x \text{ иррациональном}.\end{cases}$$

Но во множестве положительных рациональных чисел нет наименьшего числа.

1.17.23. *Указание.* Если обозначить период функции $f(x)$ через T, то из $f(T)=f(0)=f(-T)$ получаем

$$\sin T+\cos aT=1=\sin(-T)+\cos(-aT),$$

откуда $\sin T=0$, $\cos aT=1$, и, значит, $T=k\pi, aT=2n\pi$, $a=2n/k$ — рационально.

1.17.25. Разность двух возрастающих функций может и не быть монотонной функцией. Например, функции $f(x)=x$ и $g(x)=x^2$ возрастают при $x\geqslant 0$, а их разность $f(x)-g(x)=x-x^2$ не монотонна при $x\geqslant 0$: она возрастает в $[0, 1/2]$ и убывает в $[1/2, \infty)$.

1.17.26. Пример:

$$y=\begin{cases} x, \text{ если } x \text{ рационально},\\ -x, \text{ если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$$

1.17.27. а) $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}(-1<y<1)$;

б)

$$x=\begin{cases} y \text{ при } -\infty<y<1,\\ \sqrt{y} \text{ при } 1\leqslant y\leqslant 16,\\ \log_2 y \text{ при } 16<y<\infty.\end{cases}$$

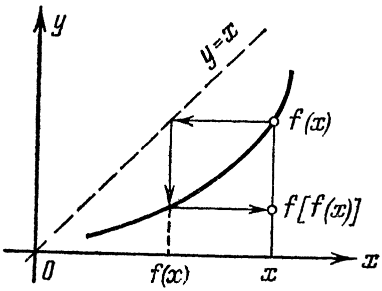

Рис. 120.

1.17.28. *Указание.* Функции $y=x^2+2x+1$ $(x\geqslant -1)$ и $y=-1+\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$ являются взаимно обратными, но уравнение $y=x$, т. е. $x^2+2x+1=x$ не имеет действительных корней (ср. задачу **1.4.4**).

1.17.30. в) *Указание.* Если E — область определения функции $f(x)$, то функция $y=f[f(x)]$ определена только для тех $x\in E$, для которых $f(x)\in E$. Построение точек искомого графика показано на рис. 120.

1.17.32. *Указание.* Величина $T=2(b-a)$ есть период: из условий симметрии $f(a+x)=f(a-x)$ и $f(b+x)=f(b-x)$ следует, что

$$f[x+2(b-a)]=f[b+(b+x-2a)]=f(2a-x)=f[a+(a-x)]=f(x).$$

1.17.33. а) Расходится; б) может сходиться, может и расходиться. Примеры:

$$x_n=1/n;\quad y_n=[1+(-1)^n]/2;\quad \lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=0,$$

$$x_n=1/n;\quad y_n=n^2;\quad \lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\infty.$$

1.17.34. а) Нельзя. Пример: $x_n=n$; $y_n=-n+1$; б) нельзя. **1.17.35.** $\alpha_n=\pi(n-2)/n$ $(n=3, 4, \ldots)$. **1.17.36.** *Указание.* Учесть, что $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$. Обратное утверждение неверно. Пример: $x_n=(-1)^{n+1}$.

1.17.38. *Указание.* Последовательность α_n может принимать лишь значения 0, 1, ..., 9. Если бы эта последовательность оказалась монотонной, то иррациональное число было бы представлено периодической десятичной дробью.

1.17.39. *Указание.* Если последовательность a_n/b_n возрастает, то

$$a_i/b_i < a_{n+1}/b_{n+1}, \text{ т. е. } b_{n+1}a_i < a_{n+1}b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда следует неравенство

$$b_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n) < a_{n+1}(b_1+b_2+\ldots+b_n),$$

а значит, и неравенство

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}}{b_1+b_2+\ldots+b_{n+1}}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=$$

$$=\frac{a_{n+1}(b_1+b_2+\ldots+b_n)-b_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{(b_1+b_2+\ldots+b_{n+1})(b_1+b_2+\ldots+b_n)}>0.$$

1.17.40. а) 2; б) 0; в) 0. **1.17.41.** *Указание.* Из неравенств $nx-1 < E(nx)\leqslant nx$ следует $x-1 < x-1/n < (E(nx))/n\leqslant x$.

1.17.42. *Указание.* Из неравенств

$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}E(kx)\leqslant\sum_{k=1}^{n}kx,$$

следует

$$x\,\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E(kx)\leqslant x\,\frac{n+1}{2n}.$$

1.17.43. *Указание.* Воспользоваться тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}a^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ (см. 1.6.19), $\lim\limits_{n\to\infty}a^{-1/n}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}}=1$, и при $a>1$, $|h|<1/n$ имеют место неравенства $a^{-1/n}-1 < a^h-1 < a^{1/n}-1$.

1.17.45. *Указание.* Разделить числитель и знаменатель на x^m.

1.17.46. а) $a=1$; $b=-1$; б) $a=1$; $b=1/2$. *Указание.* Для отыскания коэффициента a разделить выражение на x и перейти к пределу.

1.17.47. а)

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x & \text{при } x>1.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\neq\pi/2+n\pi,\\ 1 & \text{при } x=\pi/2+n\pi\end{cases}\qquad (n=0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1.17.48. *Указание.* Воспользоваться тождеством

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^n})=1-x^{2^n}.$$

1.17.49. Вообще говоря, нельзя. Например,

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}=-1,$$

а если заменить $\ln(1+x)$ на x и $\ln(1-x)$ на $-x$, то получится неверный результат: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^2}=0$.

1.17.50. 1/2. *Указание.* Если α — центральный угол, опирающийся на рассматриваемую дугу, то хорда равна $2R\sin(\alpha/2)\sim R\alpha$, а стрелка равна $R(1-\cos\alpha)\sim R\alpha^2/2$.

1.17.51. 2. *Указание.* Разность периметров описанного и вписанного правильных n-угольников равна

$$2Rn\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)=2\pi R\,\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha}\sim\pi R\alpha^2,$$

где $\alpha=\pi/n$, а сторона вписанного n-угольника равна

$$2R\sin(\pi/n)=2R\sin\alpha\sim 2R\alpha.$$

1.17.52. На эквивалентности $(1+\alpha)^3-1\sim 3\alpha$ при $\alpha\longrightarrow 0$.

1.17.53. Нет, $\lg(1+x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln 10}\sim\dfrac{x}{\ln 10}$ при $x\longrightarrow 0$.

1.17.54. а) Да. *Указание.* Если функция $\varphi(x)=f(x)+g(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, то в этой точке непрерывна и функция $g(x)=\varphi(x)-f(x)$; б) нет. Пример: $f(x)=-g(x)=\operatorname{sign}x$ (см. **1.5.11**, о)); обе функции терпят разрыв в точке $x=0$, а их сумма тождественно равна нулю, и значит, непрерывна.

1.17.55. а) Нет. Пример: $f(x)=x$ непрерывна всюду, а $g(x)=\sin(\pi/x)$ при $x\neq 0$, причем $g(0)=0$ терпит разрыв в точке $x=0$; произведение же этих функций есть функция непрерывная при $x=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\pi/x)=0$; б) нет. Пример: $f(x)=-g(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\geqslant 0,\\ -1 & \text{при } x<0;\end{cases}$ обе функции разрывны в точке $x=0$, а их произведение $f(x)g(x)\equiv -1$ непрерывно всюду.

1.17.56. Нет. Пример: $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$ Можно записать $f(x)=2\lambda(x)-1$, где $\lambda(x)$ — функция Дирихле (см. **1.14.4** б)).

1.17.57. а) $x=0$ — точка разрыва второго рода, $x=1$ точка разрыва первого рода; б) $x=1$ точка разрыва первого рода: $f(1-0)=0$, $f(1+0)=1$; в) $\varphi(x)$ разрывна во всех точках, кроме $x=0$.

1.17.58. а) $x=n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — точки разрыва первого рода: $\lim\limits_{x\to n-0} y=1$, $\lim\limits_{x\to n+0} y=y\,|_{x=n}=0$. Функция имеет период 1; б) $x=\pm\sqrt{n}$ $(n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точки разрыва первого рода:

$$\lim_{x\to\sqrt{n}-0} y=2n-1;\ \lim_{x\to\sqrt{n}+0} y=y|_{x=\sqrt{n}}=2n.$$

Функция четная; в) $x=\pm\sqrt{n}$ $(n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точки разрыва первого рода; в этих точках функция переходит от значения 1 к значению -1 и обратно. Функция четная;

г)

$$y=\begin{cases}x, & \text{если } |\sin x|<1/2, \text{ т. е. } -\pi/6+\pi n<x<\pi/6+\pi n,\\ x/2, & \text{если } |\sin x|=1/2, \text{ т. е. } x=\pm\pi/6+\pi n,\\ 0, & \text{если } |\sin x|>1/2, \text{ т. е. } \pi/6+\pi n<x<5\pi/6+\pi n.\end{cases}$$

$x=\pm\pi/6+\pi n$ — точки разрыва первого рода.

1.17.59. Функция $f[g(x)]$ имеет разрывы первого рода в точках $x=-1$; 0; $+1$. Функция $g[f(x)]$ непрерывна всюду. *Указание.* Функция $f(u)$ терпит разрыв при $u=0$, а функция $g(x)$ меняет знак в точках $x=0, \pm 1$. Функция $g[f(x)]\equiv 0$, так как $f(x)$ принимает только значения $0, \pm 1$.

1.17.61. *Указание.* Записать функцию в виде

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при} \quad -2\leqslant x<0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0, \\ (x+1)\,2^{-2/x} & \text{при} \quad 0<x\leqslant 2. \end{cases}$$

Убедиться, что функция возрастает на промежутке $[-2, 0)$ от -1 до 1 и на промежутке $[0, 2]$ от 0 до 3/2. Применить теорему о промежуточном значении к отрезкам $[-2, -1]$ и $[0, 2]$. Функция разрывна в точке $x=0$: $f(-0)=1$, $f(+0)=0$.

1.17.62. *Указание.* Пусть задано $\varepsilon>0$ и выбрана точка $x_0\in[a, b]$. Можно считать

$$\varepsilon\leqslant\min[f(x_0)-f(a),\quad f(b)-f(x_0)].$$

Выбрать точки x_1 и x_2, $x_1<x_0<x_2$, так, чтобы

$$f(x_1)=f(x_0)-\varepsilon,\quad f(x_2)=f(x_0)+\varepsilon,$$

и положить $\delta=\min(x_0-x_1,\ x_2-x_0)$.

1.17.63. *Указание.* Применить теорему о промежуточном значении к функции $g(x)=f(x)-x$.

1.17.64. *Указание.* Применить теорему о промежуточном значении к функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_n]$, заметив, что

$$\min[f(x_1), \ldots, f(x_n)]\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]\leqslant\max[f(x_1), \ldots, f(x_n)].$$

1.17.65. *Указание.* Применить теорему о промежуточном значении к функции $g(x)=2^x-1/x$ на отрезке $[1/4, 1]$.

1.17.66. *Указание.* Значения многочлена четной степени при достаточно больших значениях независимой переменной имеют тот же знак, что и коэффициент при старшем члене; поэтому многочлен меняет знак по крайней мере два раза.

1.17.67. *Указание.* Обратная функция

$$x=\begin{cases} -\sqrt{-y-1} & \text{при} \quad y<-1, \\ 0 & \text{при} \quad y=0, \\ \sqrt{y-1} & \text{при} \quad y>1 \end{cases}$$

непрерывна в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ и имеет одну изолированную точку $y=0$.

К главе II

2.1.1. б) $-20/21$. **2.1.2.** б) $y'=10x-2$. **2.1.5.** $v_{\text{ср}}=25$ *м/сек*. **2.1.6.** а) $y'=3x^2$; б) $y'=-2/x^3$. **2.1.7.** Функция недифференцируема в указанных точках. **2.2.1.** б) $y'=-\frac{2}{3}ax^{-5/3}+\frac{4}{3}bx^{-7/3}$. **2.2.2.** в) $y'=2x\operatorname{arctg}x+1$. **2.2.3.** б) -9000. **2.2.4.** а) $y'=6x^2+3$; б) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+x^9$; в) $y'=\frac{-3x^2+2x+2}{(x^2-x+1)^2}$; г) $y'=-\frac{3\sqrt{x}+8\sqrt{x}+2\sqrt{1/x}}{6\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)}$; д) $y'=\frac{\cos\varphi-\sin\varphi-1}{(1-\cos\varphi)^2}$; е) $y'=2e^x+1/x$; ж) $y'=2e^x\cos x$; з) $y'=\frac{x(\cos x-\sin x)-\sin x-e^x}{x^2e^x}$.

2.2.5. е) $30\ln^4(\operatorname{tg}^3 x)\frac{1}{\sin 6x}$; ж) $\sin\frac{2}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2(1-x)^{3/2}}$.

2.2.6. б) $y'=-3(3-\sin x)^2\cos x$; в) $y'=\dfrac{2\cos x}{3\sin x\sqrt[3]{\sin^2 x}}+\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; г) $y'=\dfrac{2e^x+2^x\ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x-2^x+1)^2}}+\dfrac{5\ln^4 x}{x}$; д) $y'=3\cos 3x-\dfrac{1}{5}\sin\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2\sqrt{x}$; е) $y'=(2x-5)\cos(x^2-5x+1)-\dfrac{a}{x^2}\sec^2\dfrac{a}{x}$; з) $y'=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}+$ $+\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}+\dfrac{1}{1+x^2}$; и) $y'=2\ln\operatorname{arctg}(x/3)\cdot\dfrac{1}{\operatorname{arctg}(x/3)}\cdot\dfrac{3}{9+x^2}$.

2.2.8. б) $y'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(\operatorname{tg} x)}\sec^2 x+\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(\operatorname{ctg} x)}\operatorname{cosec}^2 x$; г) $y'=3x(x\operatorname{sh} 2x^3+$ $+\operatorname{ch} x^2\cdot\operatorname{sh} 2x^2)$; д) $y'=e^{\operatorname{sh} ax}e^{bx}(a\operatorname{ch} ax+b)$.

2.2.9. в) $y'=\sqrt[3]{x^2}\,\dfrac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2x}{1+x^2}+3\operatorname{ctg} x-2\operatorname{tg} x\right)$; г) $y'=(\operatorname{tg} x)^{(x+1)/2}\left(\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg} x+\dfrac{x+1}{\sin 2x}\right)$.

2.2.13. а) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}+\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}\right)$; б) $f'(x)=\operatorname{th} x$; в) $f'(x)=\sqrt{\operatorname{ch} x+1}$; г) $f'(x)=1/\operatorname{ch} x$; д) $f'(x)=4\operatorname{sh} 4x$; е) $f'(x)=(a+b)e^{ax}(\operatorname{ch} bx+\operatorname{sh} bx)=$

$$=(a+b)e^{(a+b)x}.$$

2.2.14. а) $y'=(\cos x)^{\sin x}(\cos x\ln\cos x-\operatorname{tg} x\sin x)$;

б) $y'=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{\sin^2 3x(1-\sin 3x)^4}}$; в) $y'=-\dfrac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{1/2}(x+2)^{5/3}(x+3)^{5/2}}$.

2.2.17. а) $y'=\dfrac{\ln 3}{\sqrt{81^x-1}}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{\arcsin 3^{-2x}}}{\sqrt{\arcsin 3^{-2x}}}$;

б) $$y'=-\frac{\sin\ln^3 x\cdot\ln^2 x}{5x\sqrt[5]{\cos^4\ln^3 x}\left(1+\sqrt[5]{\cos^2\ln^3 x}\right)\sqrt[3]{\left(\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}\right)^2}}.$$

2.3.1. б) $k^n e^{kx}$; д) $2^{n-1}\sin(2x+n\pi/2)$; е) $\dfrac{1}{4}\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)+$ $+\dfrac{3^n}{2}\sin\left(3x+n\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{5^n}{4}\sin\left(5x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2.3.4. б) $e^x(x^2+48x+551)$; в) $e^{\alpha x}\Big\{\sin\beta x\left[\alpha^n-\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^{n-2}\beta^2+\ldots\right]+$ $+\cos\beta x\left[n\alpha^{n-1}\beta-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-3}\beta^3+\ldots\right]\Big\}$.

2.3.6. а) $\dfrac{2x^2+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$; б) $\dfrac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}+\dfrac{3x}{(1-x^2)^2}$; в) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$.

2.3.8. а) $x^3\sin x-60x^2\cos x-1140x\sin x+8640\cos x$; б) $2e^{-x}(\sin x+$ $+\cos x)$; в) $e^x[3x^2+6nx+3n(n-1)-4]$; г) $(-1)^n[(4n^2+2n+1-x^2)\cos x-$ $-4nx\sin x]$.

2.3.9. а) $100!\,[1/(x-2)^{101}-1/(x-1)^{101}]$; б) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ 197\cdot(399-x)}{2^{100}(1-x)^{201/2}}$.

Указание. $y=2(1-x)^{-1/2}-(1-x)^{1/2}$.

2.4.1. б) $x''_{yy}=-4\cos x/(6+\sin x)^3$.

2.4.3. б) $y'_x=-\operatorname{ctg}\frac{k-1}{2}t$; г) $y'_x=-2e^{-2ct}$.

2.4.4. б) $y''_{xx}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$; в) $y''_{xx}=\frac{1}{at\cos^3 t}$.

2.4.5. б) $y'''_{xxx}=-3\sin t\sec^2 t$.

2.4.6. б) $y'_x=y/x+e^{-y/x}$; в) $y'_x=(2-x)/(y-5)$; г) $y'_x=-\sqrt[3]{y/x}$.

2.4.7. б) $y''_{xx}=(e^x-e^y)(1-e^{x+y})/(1+e^y)^3$; в) $y''_{xx}=4e^{x-y}/(e^{x-y}+1)^3=$ $=4(x+y)/(x+y+1)^3$. **2.4.9.** а) $(2a-2x-y)/(x+2y-2a)$; б) $(x+y)/(x-y)$; в) $-\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$; г) $-1/e$. **2.4.10.** а) $-(2y^2+2)/y^5$; б) $111/256$.

2.4.11. а) $-c\sin t/[a(b+\cos t)]$; б) $t/2$; в) $(t^2+1)/4t^3$; г) $-\frac{e^{t^2}}{2t(2t^2+2t+1)}$; д) $\frac{(a\cos t-b\sin t)\cos^3(t/2)}{4\sin(t/2)}$; е) $-\sqrt{\frac{1-4t^2}{2-t^2}}$; ж) $-\sqrt{1-t^2}$.

2.5.1. б) $6x+2y-9=0$; $2x-6y+37=0$.

2.5.2. в) $M_1(-2/\sqrt{3},\ 5+10/(3\sqrt{3}))$, $M_2(2/\sqrt{3},\ 5-10/(3\sqrt{3}))$.

2.5.3. б) $\varphi=\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$. **2.5.8.** б) $x+y-2=0$; $y=x$. **2.5.15.** а) $\pi/4$; б) $y=1$, $x+2y-2=0$; в) $y+39/16=-(2/3)(x+5/4)$; г) $\pi/4$. **2.5.16.** 11.
2.5.17. 26450. **2.5.19.** $s=at-gt^2/2$; $v=a-gt$; $s_{\max}=s|_{t=a/g}=a^2/(2g)$.

2.5.20. $v=r'_t=\frac{2\pi a\varepsilon}{P}\sin M(1+2\varepsilon\cos M)$. **2.6.3.** $\Delta y\approx dy=0{,}05$.

2.6.5. б) $\lg 10{,}21\approx 1{,}009$; г) $\operatorname{ctg}45°10'\approx 0{,}9942$.
2.6.7. в) $\Delta_y=|\cos x|\,\Delta_x$; г) $\Delta_y=(1+\operatorname{tg}^2 x)\,\Delta_x$.

2.6.9. а) $d^2y=4^{-x^2}2\ln 4\,(2x^2\ln 4-1)\,dx^2$; б) $d^2y=\frac{4\ln x-4-\ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x-4)^3}}dx^2$; в) $d^3y=-4\sin 2x\,dx^3$.

2.6.10. а) $d^2y=-\frac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}dx^2$; б) $d^2y=-\frac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}dx^2-\frac{4x}{1-x^4}dx^2$; в частности, при $x=\operatorname{tg}t$, $d^2y=-\frac{4}{\cos^2 2t}dt^2$.

2.6.11. $\Delta V=4\pi r^2\Delta r+4\pi r\,\Delta r^2+\frac{4}{3}\pi\Delta r^3$ — объем, содержащийся между двумя шаровыми поверхностями радиусов r и $r+\Delta r$; $dV=4\pi r^2\Delta r$ — объем плоского слоя с основанием, равным поверхности шара $4\pi r^2$ и высотой Δr.

2.6.12. $\Delta s=qt\Delta t+\frac{1}{2}g\,\Delta t^2$ — путь, пройденный телом за время Δt; $ds=$ $=gt\,\Delta t=v\,dt$ — путь, пройденный телом, которое в течение всего промежутка времени двигалось бы со скоростью $v=gt$.

2.7.1. а) Не существует; б) существует и равна нулю.

2.7.2. Прямой. *Указание.* Так как

$$y=\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0\\ e^{-x}, & x<0,\end{cases}$$

то $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$.

2.7.3. $f'_-(a)=-\varphi(a)$; $f'_+(a)=\varphi(a)$.

2.7.4. *Указание.* При $x\neq 0$ производная

$$f'(x)=-\cos(1/x)+2x\sin(1/x).$$

При $x=0$ производная равна нулю:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2 \sin(1/\Delta x)}{\Delta x}=0.$$

Таким образом, производная $f'(x)$ существует для всех x, но терпит разрыв второго рода в точке $x=0$. **2.7.5.** $a=2x_0$, $b=-x_0^2$. **2.7.7.** *Указание.* Формула для суммы геометрической прогрессии представляет собой тождество по x. Приравнивая производные от обеих частей тождества, получим

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2};$$

умножив обе части последнего равенства на x и опять продифференцировав, получим

$$1^2+2^2x+\ldots+n^2x^{n-1}=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-nx^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

2.7.8. $\sin x+3\sin 3x+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)x=$

$$=\frac{(2n+1)\sin(2n-1)x-(2n-1)\sin(2n+1)x}{4\sin^2 x}.$$

Указание. Для доказательства тождества умножить левую часть его на $2\sin x$ и применить к каждому слагаемому формулу $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$. Для вывода искомой формулы продифференцировать обе части тождества и приравнять производные.

2.7.9. а) $\sin 2x\,[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$;

б) $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f'(x)f(e^x)]$;

в) $\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\dfrac{1}{\ln\varphi(x)}-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\dfrac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$.

2.7.10. а) Нельзя; б) нельзя; в) можно; г) нельзя.

2.7.11. *Указание.* Продифференцировать тождества $f(-x)=f(x)$ или $f(-x)=-f(x)$ соответственно. Этот факт легко иллюстрируется геометрически, если учесть, что график четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции — относительно начала координат.

2.7.12. *Указание.* Продифференцировать тождество $f(x+T)=f(x)$. **2.7.13.** $F'(x)=6x^2$. **2.7.14.** $y'=2|x|$. **2.7.15.** Сложная функция $f[\varphi(x)]$ может быть недифференцируема только в тех точках, где $\varphi'(x)$ не существует и где $\varphi(x)$ принимает такие значения $\varphi(x)=u$, в которых $f'(u)$ не существует. Но функция $y=u^2=|x|^2$ в точке $x=0$ имеет производную $y'=0$, хотя в этой точке функция $u=|x|$ не имеет производной.

2.7.16. а) $y''=6|x|$; б) $y''=2\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ при $x\neq 0$, $y''(0)$ не существует, так как $y'(x)$ разрывна при $x=0$.

2.7.17. *Указание.* а) Проверить, что $f^{(k)}(1)/k!=C_n^k$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ и воспользоваться свойством биномиальных коэффициентов. б) Обозначить $f(x)=u_n$; показать, что

$$u_n'=(n-1)\,u_{n-1}-u_{n-2}$$

и воспользоваться методом математической индукции.

2.7.18. *Указание.* Применить формулу Лейбница для n-й производной от произведения функций $u=e^{-x/a}$ и $v=x^2$.

2.7.19. $y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0 & \text{при } n=2k, \\ [1\cdot 3\ldots(2k-1)]^2 & \text{при } n=2k+1 \end{cases}$ $\quad(k=1, 2, \ldots)$.

Указание. Продифференцировать тождество $n-2$ раза и, положив $x=0$, получить $y^{(n)}(0)=(n-2)^2 y^{(n-2)}(0)$ $(n \geqslant 2)$.

2.7.21. *Указание*. Воспользоваться определением

$$e^{-x^2}H_{n+1}(x)=(e^{-x^2})^{(n+1)}=(-2xe^{-x^2})^{(n)}$$

и формулой Лейбница для n-й производной от произведения $u=e^{-x^2}$ и $v=-2x$. **2.7.22.** $y'_x=1/[3(y^2+1)]$.

$$\textbf{2.7.23.}\ x_{1,2}=\pm\sqrt{1+\sqrt{1-y}}\quad(-\infty<y\leqslant 1),$$

$$x_{3,4}=\pm\sqrt{1-\sqrt{1-y}}\quad(0\leqslant y\leqslant 1),$$

$$x'_i=\frac{1}{4x_i(1-x_i^2)}\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)\ \text{при}\ x_i\neq 0,\ \pm 1.$$

Указание. Решить биквадратное уравнение $x^4-2x^2+y=0$ и найти области определения полученных функций $x_i(y)$.

2.7.25. а) $x_1=-3$; $x_2=1$; б) $x=\pm 1$.

2.7.26. *Указание*. Заметить, что функция $x=2t-|t|=\begin{cases} t, & t\geqslant 0,\\ 3t, & t<0\end{cases}$ не имеет производной при $t=0$. Однако $t=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ x/3, & x<0,\end{cases}$ поэтому можно выразить $y=t^2+t\,|t|=\begin{cases} 2t^2, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$ через x: $y=\begin{cases} 2x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Последняя функция дифференцируема всюду. **2.7.27.** $a=c=1/4$; $b=1/2$. **2.7.28.** *Указание*. Кривые пересекаются в тех точках, где $\sin ax=1$. Так как в этих точках $\cos ax=0$, то

$$y'_2=f'(x)\sin ax+f(x)\,a\cos ax=f'(x)=y'_1,$$

т. е. кривые касаются.

2.7.30. *Указание*. При $t\neq\pi n$ уравнения касательной и нормали приводятся соответственно к виду

$$y=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}(x-at)+2a,\quad y=-\operatorname{tg}\frac{t}{2}(x-at).$$

При $t=\pi(2k-1)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ касательная $(y=2a)$ касается круга в верхней точке, а нормаль $(x=at)$ проходит через верхнюю и нижнюю точки; при $t=2k\pi$ $(k=0,\ 1,\ \ldots)$ касательная $(x=at)$ проходит через обе точки, а нормаль $(y=0)$ касается круга в нижней точке. **2.7.34.** $\frac{d^2y}{dt^2}+y$. **2.7.35.** Относительная погрешность $\delta=\Delta l/l\approx 2d\varphi/\sin 2\varphi$. Наиболее надежный результат, т. е. результат с наименьшей относительной погрешностью, соответствует значению $\varphi=45°$.

К главе III

3.1.2. б) Да; в) нет, так как производная в точке 0 не существует. **3.1.5.** $\xi=e-1$. **3.1.7.** Нет, так как $g(-3)=g(3)$. **3.1.9.** г) *Указание*. Рассмотреть функции

$$f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x\ \text{при}\ |x|>1,$$

$$g(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-2\operatorname{arctg}x\ \text{при}\ |x|<1.$$

3.1.15. а) $\xi=7/2$; б) $\xi=2/\ln 3$; в) $\xi=(10\pm\sqrt{52})/24$; г) неприменима, так как функция не имеет производной в точке $x=0$.

3.1.16. $1{,}26 < \ln(1+e) < 1{,}37$. *Указание.* Написать формулу Лагранжа для функции $f(x)=\ln x$ на отрезке $[e, e+1]$ и в полученном соотношении $\ln(1+e)=1+1/\xi$ $(e<\xi<e+1)$ оценить правую часть.

3.1.17. *Указание.* Применить формулу Лагранжа к функции $f(x)=\ln x$ на отрезке $[1, 1+x]$, $x>0$ и в полученном соотношении $\ln(1+x)=x/\xi$ $(1<\xi<1+x)$ оценить правую часть. **3.2.1.** в) 2; г) 0; е) $-1/2$. **3.2.3.** б) 0. *Указание.* Представить $\operatorname{ctg} x-1/x=(x-\operatorname{tg} x)/(x \operatorname{tg} x)$; в) $1/2$. **3.2.5.** б) $e^1=e$. **3.2.6.** а) 1; б) 1. **3.2.9.** а) $4/7$; б) $\ln a-1$; в) 2; г) $\pi\sqrt{3}/6$; д) $1/a$; е) 0; ж) 1; з) $\ln a$; и) $e^{-m^2 n/2}$; к) $2/\pi$; л) -1; м) e; н) $2/3$; о) $1/2$; п) $a^2/2$; р) $e^{-1/30}$; с) 1; т) $-1/2$. **3.3.5.** б) 0,34201. **3.3.6.** $\sqrt[4]{83}\approx 3{,}018350$. *Указание.* $\sqrt[4]{83}=\sqrt[4]{81+2}=3(1+2/81)^{1/4}$. Применить биномиальную формулу и удержать четыре члена.

3.3.7. *Указания.* б) Написать формулу Маклорена для функции $f(x)=\operatorname{tg} x$ с остаточным членом $R_4(x)$; в) написать формулу Маклорена для функции $f(x)=(1+x)^{1/2}$ с остаточными членами $R_2(x)$ и $R_3(x)$.

3.4.2. а) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{5}x^5+o(x^5)$;

б) $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^5}{24}+o(x^5)$.

3.4.3. б) $-1/2$; в) $-1/12$; г) $1/3$; д) 1.

3.4.4. а) $1+2x+x^2-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5}{6}x^4-\dfrac{1}{15}x^5$; б) $-x^2/2-x^4/12+x^6/45$; в) $1-x/2+x^2/12-x^4/720$.

3.5.1. г) Функция убывает в промежутке $(-\infty, 0)$, возрастает в промежутке $(0, \infty)$; д) функция возрастает в промежутках $(-\infty, 1/2)$ и $(3, +\infty)$, убывает в промежутке $(1/2, 3)$; е) функция возрастает на всей оси.

3.5.2 б) В промежутках $(0, \pi/4)$ и $(5\pi/4, 2\pi)$ функция возрастает, а в промежутке $(\pi/4, 5\pi/4)$ убывает.

3.5.8. а) Функция возрастает на всей числовой оси; б) функция возрастает в промежутке $(-1, 0)$, убывает в промежутке $(0, 1)$; в) функция убывает на всей числовой оси; г) функция возрастает в обоих промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, где она определена; д) функция убывает в промежутках $(0, 1)$ и $(1, e)$, возрастает в промежутке $(e, +\infty)$; е) функция убывает в промежутках $(-\infty, 1)$ и $(1, \infty)$, возрастает в промежутке $(-1, 1)$. **3.5.10.** $a\leqslant 0$. **3.5.11.** $b\geqslant 1$. **3.6.1.** б) $f(1)=f(3)=3$ — минимум, $f(2)=4$ — максимум; г) $f(7/5)=-1/24$ — минимум. **3.6.2.** б) $f(\pm 1)=\sqrt{3}$ — минимумы; $f(0)=2$ — максимум.

3.6.3. б) $f(-2)=160$ — максимум; $f(0)=2$ — минимум.

3.6.7. б) $f(0)=0$ — минимум.

3.6.8. б) На отрезке $[0, 2\pi]$: $f(\pi/2)=-4$ — минимум, $f(3\pi/2)=4$ — максимум;

3.6.10. а) $f(0)=0$ — минимум, $f(2)=4e^{-2}$ — максимум; б) $f(-2)=-1$ — минимум, $f(2)=1$ — максимум; в) $f(0)=0$ — максимум, $f\left(\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{25}{9}\sqrt[5]{\dfrac{1}{9}}$ — минимум; г) $f(\pm 2)=-1$ — максимум, $f(0)=7$ — минимум; д) $f(-3)=3\sqrt[3]{3}$ — максимум, $f(2)=-\sqrt[3]{44}$ — минимум.

3.6.11. а) Экстремума нет; б) экстремума нет; в) $f(0)=0$ — максимум; г) $f(0)=0$ — минимум.

3.7.1. в) $f(1)=1/e$ — наибольшее значение, $f(0)=0$ — наименьшее значение; г) $f(\pm 1/2)=3/\sqrt{8}$ — наибольшее значение, $f(\pm 1)=0$ — наименьшее значение.

3.7.2. б) $y(0)=\pi/2$ — наибольшее значение, $y(\pm\sqrt{2}/2)=\pi/3$ — наименьшее; в) $y(4)=6$ — наибольшее значение, $y(0)=0$ — наименьшее.

3.7.6. а) $f(-2)=16/3$ — наибольшее значение, $f(3)=-37/4$ — наименьшее; б) $f(0)=2$ — наибольшее значение, $f(\pm 2)=0$ — наименьшее; в) $f(1/\sqrt{3})=\pi/6+0{,}25\ln 3$ — наибольшее значение, $f(\sqrt{3})=\pi/3-0{,}25\ln 3$ — наименьшее;

г) $f(\pi/3)=3\sqrt{3}/2$ — наибольшее значение, $f(3\pi/2)=-2$ — наименьшее; д) $f(1)=1$ — наибольшее значение, $f(2)=2(1-\ln 2)$ — наименьшее; е) наибольшего значения нет, наименьшее $f(0)=1$.

3.8.3. $H=R\sqrt{2}$, где H — высота цилиндра, R — радиус шара. **3.8.7.** $x=a\sin\alpha$, $y=a\cos\alpha$, где $\alpha=0,5\operatorname{arctg}2$.

Указание. Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции

$$S=4xy+4x(y-x)=4a^2(\sin 2\alpha-\sin^2\alpha)$$

в промежутке $0<\alpha<\pi/4$. **3.8.8.** $P_{\max}=E^2/(4W_i)$ при $W=W_i$. **3.8.9.** $h=2R=2\sqrt[3]{3v/(2\pi)}$. **3.8.10.** Радиус основания цилиндра $r=R/2$, где R — радиус основания конуса. **3.8.11.** Уравнение искомой прямой $x/2+y/4=1$.

3.8.12. $x=a-p$ или $a>p$ и $x=0$ при $a\leqslant p$.

3.8.13. $v=\sqrt[3]{a/(2b)}$. *Указание.* На покрытие одного узла потребуется $1/v$ часов. Соответствующие затраты выражаются формулой $T=(a+bv^3)/v=a/v+bv^2$.

3.8.14. $\varphi=\pi/3$. *Указание.* При ширине доски a площадь поперечного сечения желоба равна $a^2(1+\cos\varphi)\sin\varphi$, где φ — угол наклона боковых стенок к днищу.

3.8.15. $h/2$. *Указание.* Точка падения струи отстоит от основания сосуда на $v\sqrt{2H/g}$, где $H=h-x$ — высота расположения отверстия, v — скорость вытекания; поэтому дальность струи определяется выражением

$$\sqrt{2gx}\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}=2\sqrt{x(h-x)}.$$

3.8.16. Через $a/(2v)$ часов наименьшее расстояние будет равно $a/2$ *км*.

3.9.1. б) Интервалы вогнутости $(-\infty,\ 1/3)$ и $(1,\ \infty)$, выпуклости $(1/3,\ 1)$; точки перегиба $\left(\frac{1}{3},\ 12\frac{11}{27}\right)$, $(1,\ 13)$; в) интервалы вогнутости $(-\sqrt{3},\ 0)$ и $(\sqrt{3},\ \infty)$, выпуклости $(-\infty,\ -\sqrt{3})$ и $(0,\ \sqrt{3})$; точки перегиба $(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3}/10)$, $(0,\ 0)$, $(\sqrt{3},\ \sqrt{3}/10)$; д) кривая везде вогнута; е) интервалы вогнутости $(0,\ x_1)$ и $(x_2,\ \infty)$, выпуклости $(x_1,\ x_2)$, где $x_1=e^{(3-\sqrt{5})/2}$, $x_2=e^{(3+\sqrt{5})/2}$; точки перегиба $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, где

$$y_1=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 e^{(\sqrt{5}-3)/2},\quad y_2=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 e^{-(3+\sqrt{5})/2}.$$

3.9.5. а) Точка перегиба $(3,\ 3)$; кривая выпукла при $x<3$ и вогнута при $x>3$; б) абсцисса точки перегиба $x=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; кривая вогнута в $\left[-\frac{\pi}{2},\ \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, выпукла в $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

3.10.1. в) $y=0$; г) $x=0$; и) $y=2x$ для $x\to+\infty$ и $y=-2x$ для $x\to-\infty$.

3.10.3. а) $x=3$, $y=x-3$; б) $y=\pm\pi x/2-1$; в) $y=x$; г) $x=\pm 2$; д) $y=2x-\pi/2$.

3.11.2. а) Функция определена всюду, четная. График симметричен относительно оси Oy, асимптот не имеет. Минимум $y(0)=1$, максимумы $y(1)=y(-1)=3/2$. Точки перегиба $(\pm\sqrt{3}/3,\ 23/18)$; б) функция определена в $(-\infty,\ -1)$ и $(-1,\ +\infty)$. График имеет вертикальную асимптоту $x=-1$ и наклонную асимптоту $y=x-3$. Минимум $y(0)=0$, максимум $y(-4)=-256/27$. Точки перегиба $(-6,\ -3296/125)$ и $(2,\ 16/27)$; в) функция определена в $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$. График имеет вертикальную асимптоту $x=0$. Минимум $y(1/2)=3$. Точка перегиба $(-\sqrt[3]{2}/2,\ 0)$; г) функция определена в $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 1)$ и $(1,\ \infty)$, нечетная. График симметричен относительно начала координат, имеет две вертикальные асимптоты $x=\pm 1$ и наклонную асимптоту $y=x$. Минимум $y(\sqrt{3})=+3\sqrt{3}/2$, максимум $y(-\sqrt{3})=-3\sqrt{3}/2$. Точка перегиба (0, 0); д) функция определена всюду, четная. График симметричен относительно оси Oy, имеет горизонтальную асимптоту $y=0$. Минимум $y(0)=\sqrt[3]{4}$, максимумы $y(\pm\sqrt{2})=2\sqrt[3]{2}$. Точки перегиба $(\pm 2, \sqrt[3]{4})$; е) функция определена в $(-2, +\infty)$. Вертикальная асимптота $x=-2$. Минимум $y(0)=0$, максимум $y(-0{,}73)\approx 0{,}12$. Точка перегиба $(-0{,}37;\ 0{,}075)$; ж) функция определена всюду. Горизонтальная асимптота $y=0$ для $x\to+\infty$. Максимум $y(3/4)=(3/4e)^3$. Точки перегиба (0, 0),

$$\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4},\ \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^3 e^{\sqrt{3}-3}\right),\quad \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4},\ \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)^3 e^{-3-\sqrt{3}}\right);$$

з) функция определена и непрерывна всюду. Горизонтальная асимптота $y=1$. Минимум $y(0)=0$, причем точка (0, 0) — точка излома графика: $y'_-(0)=-\pi/2$, $y'_+(0)=+\pi/2$.

3.12.6. 4,4934. **3.12.8.** $x_1=-2{,}330$; $x_2=0{,}202$; $x_3=2{,}128$. **3.12.11.** 0,6705. **3.12.12.** а) 0,27; 2,25; б) 0,21. **3.12.13.** а) 1,17; б) 3,07. **3.12.14.** 1,325. **3.12.15.** 0,5896 и 2,2805. *Указание.* Для уточнения меньшего корня записать уравнение в виде $x=e^{0,8x-1}$, для уточнения бо́льшего корня — в виде $x=1{,}25(1+\ln x)$.

3.13.1. Нет. *Указание.* Показать, что в точке $x=1$ производная не существует: $f'_-(1)=1$; $f'_+(1)=-1$.

3.13.2. *Указание.* Проверить равенство $f(b)-f(a)=(b-a)f'((a+b)/2)$.

3.13.3. *Указание.* К функции $f(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}(x)$ применить теорему Ролля на отрезке $[0, x_0]$.

3.13.4. *Указание.* Убедиться, что производная $f'(x)=4(x^3-1)$ имеет лишь один действительный корень $x=1$ и применить теорему Ролля.

3.13.5. *Указание.* Производная $f'(x)=nx^{n-1}+p$ имеет только один действительный корень при n четном, и не более двух действительных корней при n нечетном.

3.13.6. *Указание.* Производная есть многочлен третьей степени и имеет три корня. Воспользоваться тем, что между корнями многочлена лежит корень его производной.

3.13.7. *Указание.* Из верного равенства $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1/\xi)=0$ $(0<\xi<x)$, где ξ определяется из теоремы о среднем, не следует равенство $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1/x)=0$, так как нельзя утверждать, что переменная ξ при стремлении x к нулю пробегает все промежуточные значения в окрестности нуля. Более того, ξ принимает только такую последовательность значений E, для которых $\lim\cos(1/\xi)=0$ $(\xi\in E)$.

3.13.8. *Указание.* Ошибка заключается в том, что в формуле Лагранжа для $f(x)$ и $\varphi(x)$ берется одна и та же точка ξ.

3.13.9. *Указание.* а) К функции $\ln x$ на отрезке $[b, a]$ применить формулу Лагранжа; б) применить формулу Лагранжа к функции z^p на отрезке $[y, x]$.

3.13.10. *Указание.* Убедиться с помощью формулы Лейбница, что коэффициенты многочлена Чебышева — Лагерра чередуются по знаку, причем при нечетных степенях x стоят отрицательные коэффициенты. Вывести отсюда, что $L_n(x)>0$ при $x<0$.

3.13.11. *Указание.* Используя теорему Ролля, показать, что внутри отрезка $[x_0, x_n]$ имеется по крайней мере n корней первой производной, $n-1$ корней второй производной и т. д.

3.13.12. *Указание.* Правило Лопиталя здесь неприменимо, так как производные и числителя и знаменателя обращаются в нуль во всех точках, где обращается в нуль множитель $\sin x$, на который мы сократили при вычислении предела отношения производных.

3.13.13. *Указание.* Написать формулу Тейлора с остаточным членом R_2:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1 h);$$

сравнивая ее с разложением, приведенным в тексте задачи, получить равенство $\dfrac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{h}=\dfrac{1}{3}f'''(a+\theta_1 h)$ и перейти к пределу при $h\longrightarrow 0$.

3.13.14. *Указание.* Доказательство вести от противного. Предположить, что $e=p/q$, где p, q — натуральные числа, $p>q>1$, и по формуле Тейлора получить при $n>p$

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta}(0<\theta<1);$$

умножить обе части этого равенства на $n!$ и, отметив, что $\dfrac{p}{q}n!$ и $\left(1+\dfrac{1}{1!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)n!$ — целые положительные числа, а $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{p}{q}\right)^{\theta}<$ $<\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{p}{q}<1$, получить противоречие.

3.13.15. *Указание.* Убедиться, что функция

$$f(x)=\begin{cases}(\sin x)/x, & 0<x\leqslant\pi/2,\\ 1, & x=0\end{cases}$$ непрерывна на отрезке $[0,\ \pi/2]$.

Проверить, что производная $f'(x)<0$ внутри отрезка.

3.13.16. *Указание.* Показать, что $f'(x)\geqslant 0$. Проверить, что

$$f(0)=1-a\begin{cases}>0 \text{ при } a<1,\\ <0 \text{ при } a>1,\end{cases}$$

и воспользоваться возрастанием функции.

3.13.17. *Указание.* Показать, что функция $f(x)=xe^x-2$ возрастает и на концах промежутка $(0,\ 1)$ имеет разные знаки.

3.13.18. *Указание.* Показать, что производная

$$f'(x)=1/2+2x\sin(1/x)-\cos(1/x)\qquad(x\neq 0)$$

в точках $x=1/[(2n+1)\pi]$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ равна $3/2$, а в точках $x=1/(2n\pi)$ равна $-1/2$, т. е. в любой близости от начала координат производная меняет знак.

3.13.19. *Указание.* Убедиться, что вспомогательная функция $\psi(x)=f(x)-$ $-\varphi(x)$ возрастает.

3.13.20. *Указание.* Убедиться, что производная во всех точках области определения функции сохраняет знак, если $ad-bc\neq 0$. Если же $ad-bc=0$, т. е. $a/c=b/d$, то функция является постоянной. **3.13.21.** $p=-6$, $q=14$.

3.13.22. Минимум $f(x_0)=0$, если $\varphi(x_0)>0$ и n — четное; максимум $f(x_0)=0$, если $\varphi(x_0)<0$ и n — четное; точка x_0 не является точкой экстремума, если n — нечетное. *Указание.* При n четном функция в некоторой окрестности точки x_0 сохраняет знак и либо строго больше нуля, либо строго меньше нуля, в зависимости от знака $\varphi(x_0)$. При n нечетном функция в некоторой окрестности точки x_0 меняет знак.

3.13.23. *Указание.* При $x\neq 0$ $f(x)>0$, следовательно, $f(0)$ — минимум. При $x>0$ производная $f'(x)=2-\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ положительна в точках $x=1/(2\pi n)$ и отрицательна в точках $x=1/[(2n+1)\pi]$. Аналогично исследуется случай $x<0$. **3.13.24.** а) 1 и 0; б) 1 и -2.

3.13.25. а) Наименьшее не существует, наибольшее равно 1; б) функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

3.13.30. Да. *Указание.* Так как $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0, то x_0 — точка экстремума для функции $f'(x)$.

3.13.31. График проходит через точку $M(-1, 2)$, имеет касательную $y-2=-(x+1)$ и точка M является точкой перегиба, причем слева от точки M кривая вогнута вниз, а справа — вверх. *Указание.* Функция $f''(x)$ возрастает и меняет знак при переходе через $x=-1$. **3.13.32.** $h=1/(\sigma\sqrt{2})$.

3.13.33. *Указание.* По теореме Ролля между корнями первой производной лежит хотя бы один корень второй производной. При переходе через один из этих корней вторая производная должна сменить знак.

3.13.35. *Указание.* Многочлен имеет вид $a_0x^{2n}+a_1x^{2n-2}+\ldots+a_{n-1}x^2+a_n$. Многочлены такого вида с положительными коэффициентами не имеют действительных корней.

3.13.36. *Указание.* Воспользоваться тем, что многочлен нечетной степени (а значит, и его вторая производная) имеет хотя бы один действительный корень и хотя бы раз меняет знак.

3.13.37. *Указание.* Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}((2x^4+x^3+1)/x^3-2x-1)$.

К главе IV

4.1.2. $I=x^3+x^2+0{,}5\ln|2x-1|+C$.

4.1.7. $I=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+C$. *Указание.* Освободиться от иррациональности в знаменателе.

4.1.14. $I=\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C$.

4.1.15. $I=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4.1.18. $I=\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+1}|+C$.

4.1.20. $I=\frac{1}{2\sqrt{70}}\ln\left|\frac{\sqrt{10}x-\sqrt{7}}{\sqrt{10}x+\sqrt{7}}\right|+C$.

4.1.21. а) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C$; б) $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x}+C$; в) $3\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x+C$; г) $-\frac{2}{x}+\operatorname{arctg}x+C$.

4.1.22. а) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\arcsin x+C$; б) $\sin x-\cos x+C$;

в) $-\frac{2}{\ln 5}5^{-x}+\frac{1}{5\ln 2}2^{-x}+C$; г) $-0{,}2\cos 5x-x\sin 5\alpha+C$.

4.2.3. $I=\frac{1}{12}\sqrt{(2x-5)^3}+\frac{5}{2}\sqrt{2x-5}-\frac{37}{4\sqrt{2x-5}}+C$.

4.2.8. $I=-2\sqrt{\cos x}+C$. **4.2.10.** $I=\frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{2/3}+C$.

4.2.13. а) $0{,}75\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}+C$; б) $\ln|\ln x|+C$;

в) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C$; г) $\frac{1}{na}\operatorname{arctg}\frac{x^n}{a}+C$.

д) $-2\cos\sqrt{x}+C$; е) $\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln|\ln x|+C$.

4.2.14. а) $-\frac{3}{140}(35-40x+14x^2)(1-x)^{4/3}+C$;

б) $\frac{2}{3}(\ln x-5)\sqrt{1+\ln x}+C$; в) $\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C$;

г) $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}+C$.

4.3.2. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

4.3.14. $-\cos x\ln\operatorname{tg} x+\ln|\operatorname{tg}(x/2)|+C$.

4.3.17. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

4.3.18. $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left[(\ln x)^2-\frac{3}{2}\ln x+\frac{9}{8}\right]+C$.

4.3.19. $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$.

4.3.20. $-0{,}5(x/\sin^2 x+\operatorname{ctg} x)+C$.

4.3.21. $\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}+C$.

4.3.22. $\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{13}{9}\right)e^{3x}+C$.

4.3.23. $(x^4-10x^2+21)\sin x+x(4x^2-20)\cos x+C$.

4.3.24. $\frac{9x^2+18x-11}{27}\cos 3x+\frac{2x+2}{9}\sin 3x+C$.

4.3.25. $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x+C$.

4.3.26. $\frac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg} x-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}+C$.

4.3.27. $\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+C$.

4.3.28. а) $-\frac{18x^2+6x-13}{72}\sin(6x+2)-\frac{6x+1}{72}\cos(6x+2)+$

$$+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2-x+C;$$

б) $\frac{3}{4}(x^2-7x+1)(2x+1)^{2/3}-\frac{9}{40}(2x-7)(2x+1)^{5/3}+\frac{27}{320}(2x+1)^{8/3}+C$.

4.4.2. г) *Указание.* Применить обобщенную формулу интегрирования по частям и выразить I_n из получаемого при этом соотношения

$$I_n=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}\sin^{n-1}x(\alpha\sin x-n\cos x)+\frac{n(n-1)}{\alpha^2}I_{n-2}-\frac{n^2}{\alpha^2}I_n.$$

4.4.3. $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}\quad(n\geqslant 2)$;

$I_3=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}I_1=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

4.4.4. а) $I_n=\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x-I_{n-2};\quad I_1=-\ln|\cos x|+C;\quad I_0=x+C;$

б) $I_n=\frac{1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1}x-I_{n-2};\ I_1=\ln|\sin x|+C;\quad I_0=x+C;$

в) $I_n=\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+a}-\frac{n-1}{n}\alpha I_{n-2};\quad I_1=\sqrt{x^2+a}+C;$

$$I_0=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C.$$

К главе V

5.1.2. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C.$

5.1.5. $2\ln|x-1|-\ln|x|-x/(x-1)^2+C.$

5.1.8. $\frac{2}{3\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+2)+C.$

5.1.10. $5x+\ln x^2(x+2)^4|x-2|^3+C.$

5.1.11. $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+C.$

5.1.12. $-1/(x-2)-\operatorname{arctg}(x-2)+C.$

5.1.13. $-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

5.1.14. $\frac{x+2}{2(x^2+1)}+2\operatorname{arctg}x+\ln\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+1}}+C.$

5.2.2. $4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln|\sqrt[12]{x}-1|+C.$

5.2.4. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\ln\left|\frac{\sqrt[3]{(t+2)^4}}{\sqrt[3]{t-1}\cdot\sqrt{t^2+t+1}}\right|+C$, где $t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}$.

5.2.7. $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}+C.$ 5.2.8. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}+C.$

5.2.9. $\left(1-\frac{1}{2}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+C.$

5.3.3. $-2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1}{x}+1\right)+C.$

5.3.5. $2\ln|\sqrt{x^2+2x+4}-x|-\frac{3}{2(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1)}-$

$$-\frac{3}{2}\ln|\sqrt{x^2+2x+4}-x-1|+C.$$

5.3.6. $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$

5.3.7. $(x-1)/\sqrt{2x-x^2}+C.$ 5.3.8. $(x+\sqrt{1+x^2})^{15}/15+C.$

5.4.2. $5\sqrt{x^2+2x+5}-\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C.$

5.4.5. $\frac{3x^2+x-1}{3}\sqrt{3x^2-2x+1}+C.$

5.4.6. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$

5.4.8. $\frac{1}{3}(x^2-14x+111)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C.$

5.4.9. $\frac{1}{64}(32x^2-20x-373)\sqrt{2x^2+5x+7}+\frac{3297}{128\sqrt{2}}\ln\left|4x+5+\right.$

$$\left.+2\sqrt{4x^2+10x+14}\right|+C.$$

5.4.10. $\frac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{(x+1)}+C.$

5.4.11. $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{x-2}+C.$

5.4.12. $-\frac{2}{15}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,\frac{8x^2+12x+7}{(x+1)^2}+C.$

5.4.13. $\ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right|+C.$ *Указание.* Сначала сделать подстановку $x^2=t$.

5.5.2. $3\,\mathrm{arctg}\sqrt[3]{x}+C.$ 5.5.4. $\frac{2}{3}(2+x^{2/3})^{9/4}-\frac{12}{5}(2+x^{2/3})^{5/4}+C.$

5.5.5. $\frac{3}{22}(1+x^2)^{11/3}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{8/3}+\frac{3}{10}(1+x^2)^{5/3}+C.$

5.5.7. $\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C.$

5.5.8. $3\ln\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}}+C.$

5.5.9. $(1+x^2)^{3/2}(3x^2-2)/15+C.$ 5.5.10. $\sqrt{1+x^2}(2x^2-1)/(3x^3)+C.$

5.5.11. $\frac{21}{32}\sqrt[7]{\left(1+\sqrt[3]{x^4}\right)^8}+C.$ 5.5.12. $\frac{5}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4/5}-\frac{5}{9}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{9/5}+C.$

5.6.2. $\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}+C.$ 5.6.6. $\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\,x+C.$

5.6.10. а) $-\mathrm{ctg}\,x+\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3\,x-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5\,x-x+C;$

б) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\,x-\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{tg}^2\,x)+C=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\,x+\ln|\cos x|+C.$

5.6.12. $-\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$

5.6.14. $\frac{2}{\sqrt{15}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1+2\mathrm{tg}\,(x/2)}{\sqrt{15}}\right)+C.$

5.6.22. а) $-\frac{x}{8}+\frac{\mathrm{sh}\,4x}{32}+C;$ б) $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\,\mathrm{th}\,(x/2)+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

5.7.3. $-\frac{1}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{8}x(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}+C.$

5.7.4. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}/x+C.$

5.7.7. $I=\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$ **5.7.8.** $I=\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}+C.$

5.8.2. $I=4\sqrt{1-x}+2\ln\left(2-x-2\sqrt{1-x}\right)-2\left(1+\sqrt{1-x}\right)\ln x+C.$

5.8.5. $I=e^{\alpha t}\frac{\alpha\cos t+\sin t}{\alpha^2+1}+C$, где $t=\operatorname{arctg} x$.

К главе VI

6.1.9. $I=4\cdot(3+19)/2=44$ как площадь трапеции с высотой $5-1=4$ и основаниями $4\cdot 1-1=3$ и $4\cdot 5-1=19$.

6.1.12. $s_n=16\frac{1}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$; $S_n=16\frac{1}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$.

6.2.2. а) 1; б) 3/2; в) $\pi/6$. **6.2.10.** а) 7/72; б) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; в) π; г) $\pi/4-\operatorname{arctg}(\pi/4)$; д) $\ln 2$; е) 1; ж) $\operatorname{arctg} e-\pi/4$; з) $\pi/16$; и) 14/15; к) 4/3; л) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)/2$. **6.3.1.** в) $3<I<5$. *Указание.* $M=f(0)=5/2$, $m=f(2)=3/2$. **6.3.11.** а) $(\sin 2x)/x$; б) $-\sqrt{1+x^4}$. **6.3.14.** б) $\pi^2/4$. **6.3.15.** б) $\frac{dy}{dx}=-e^{-y}\sin x$. **6.3.23.** а) $\ln x$; б) $3/x$. **6.3.24.** а) $y'_x=t/\ln t$; б) $y'_x=(\operatorname{tg} t)/t^2$.

6.3.25. а) В точке $x=1$ максимум, в точке $x=-1$ минимум; б) в точках $x=-2$; 0; 2 минимум, в точках $x=\pm 1$ максимум.

6.4.3. а) $\pi a^4/16$ (подстановка $x=a\sin t$); б) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)/2$ (подстановка $x=\operatorname{tg} t$).

6.4.6. а) $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$; б) $2\left(\sqrt{3}-1\right)$; в) $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

6.4.15. а) $2-2\ln 2$; б) $0{,}2\ln 112$; в) $\sin(\pi/24)/(\sin(\pi/8)\sin(\pi/12))$; г) $\sqrt{3}-0{,}5\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$; д) $0{,}25\ln 3$ (подстановка $\sin x-\cos x=t$); е) $a^3(\pi/4-2/3)$ (подстановка $x=a\cos t$); ж) $\pi a^2/2$ (подстановка $x=2a\sin^2 t$); з) $\pi/4+1/2$.

6.4.16. а) $\pi/6$; б) $\pi/4$; в) $(1/4)\ln(32/17)$ (подстановка $x^4=t$); г) $\pi/12$ (подстановка $x^2=a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t$).

6.4.17. Подстановка $x=1/t$ не годится, так как эта функция разрывна при $t=0$

6.4.18. Подстановка $t=\operatorname{tg}(x/2)$ не годится, так как эта функция разрывна при $x=\pi$.

6.4.19. *Указание.* Обратная функция $x=\pm\sqrt{t^5}$ двузначна. Для получения верного результата надо разбить исходный интервал на два:

$$\int_{-2}^{2}\sqrt[5]{x^2}\,dx=\int_{-2}^{0}\sqrt[5]{x^2}\,dx+\int_{0}^{2}\sqrt[5]{x^2}\,dx$$

и применить подстановки: $x=-\sqrt{t^5}$ в $-2<x<0$, $x=+\sqrt{t^5}$ в $0<x<2$.

6.4.20. Нельзя, так как $\sec t\geqslant 1$, а промежуток интегрирования $[0, 1]$.

6.4.21. Можно; см. **6.4.12.**

6.4.22. *Указание.* Записав $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$, в первом интеграле сделать замену $x = -t$.

6.4.23. $\int\limits_{0}^{1} f(\arcsin t)\,dt + \int\limits_{1}^{-1} f(\pi - \arcsin t)\,dt + \int\limits_{-1}^{0} f(2\pi + \arcsin t)\,dt.$

Указание. Представив данный интеграл в виде суммы трех интегралов по промежуткам $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$, сделать в них замену переменной соответственно $x = \arcsin t$, $x = \pi - \arcsin t$, $x = 2\pi + \arcsin t$.

6.5.3. 1) Если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad \text{а} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx = 0.$$

2) Если $f(x)$ — нечетная функция, то $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$, а $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx =$

$= 2\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin n\,dx.$

6.5.4. 0. **6.6.3.** $6-2e$. **6.6.5.** $\pi\sqrt{2}-4$. **6.6.6.** $\pi-2$. **6.6.13.** а) $\pi/2-1$; б) $-1/e$; в) $\pi/4-(\sqrt{3}/9)\pi+(1/2)\ln(3/2)$; г) $\pi/4-1/2$; д) $\ln 2-1/2$; е) $\ln(2/8)$; ж) $\pi/2-1$; з) $16\pi/3-2\sqrt{3}$.

6.6.14. *Указание.* Два раза проинтегрировать по частям, полагая первый раз $u=(\arccos x)^n$, второй раз $u=(\arccos x)^{n-1}$.

6.6.15. *Указание.* Интегрировать по частям, полагая $u=x$.

6.7.4. а) 0,601. *Указание.* Оценить $|f^{IV}(x)|$ на отрезке $[\pi/4, \pi/2]$ и взять $2n=6$; б) 0,7462. **6.7.5.** 0,96.

6.8.1.

$$F(x) = \begin{cases} x - x^2/2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1/2 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ (x-2)^3/3 + 1/2 & \text{при } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

Непрерывность проверяется непосредственно. Утверждение о производной требует проверки только в точках $x=1$, $x=2$.

6.8.2. *Указание.* Убедиться, что функция $f(x)$ непрерывна как внутри интервала $(0, 1)$, так и на концах $\left(\lim\limits_{x\to+0} f(x) = f(0) \text{ и } \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = f(1)\right)$.

6.8.3. Нет. *Указание.* Рассмотреть функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально на отрезке } [0, 1]. \end{cases}$$

6.8.4. $1-\sqrt{3}$. *Указание.* $\int\limits_{a}^{b} f''(x)\,dx = f'(b) - f'(a)$.

6.8.5. *Указание.* Положив для определенности $x > 0$ и

$$E(x) = n \leqslant x < n+1,$$

воспользоваться аддитивностью интеграла

$$\int_0^x E(x)\,dx=\int_0^1 E(x)\,dx+\int_1^2 E(x)\,dx+\ldots+\int_{n-1}^n E(x)\,dx+\int_n^x E(x)\,dx.$$

6.8.6. Первообразная $F_1(x)$ приведет к верному результату, а $F_2(x)$ — к неверному, так как эта функция терпит разрыв в промежутке $[0, \pi]$.

6.8.7. $F(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t)\,dt$. *Указание*. Любую первообразную $F(x)$ можно представить в виде $F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,dt+C$. Полагая $x=x_0$, находим $C=y_0$.

6.8.8. $\xi=\frac{1}{2}\ln\frac{e^{2b}-e^{2a}}{2b-2a}$.

6.8.9. Функция определена на отрезке $[-1, 1]$, нечетна, возрастает; на отрезке $[-1, 0]$ выпукла, на отрезке $[0, 1]$ вогнута; точка $[0, 0]$—точка перегиба.

6.8.10. *Указание*. Функция

$$f(x)=\begin{cases} x^x & \text{при } 0<x\leqslant 1,\\ 1 & \text{при } x=0\end{cases}$$

непрерывна на отрезке, достигает наименьшего значения $m=e^{-1/e}\approx 0{,}692$ при $x=1/e$ и наибольшего значения $M=1$ при $x=0$ и при $x=1$.

6.8.11. *Указание*. Проинтегрировать неравенство $2/\pi\leqslant(\sin x)/x\leqslant 1$.

6.8.12. *Указание*. Проинтегрировать неравенство

$$\sqrt{x\sin x}>\sqrt{x^2-x^4/6}=x\sqrt{1-x^2/6}\quad \text{в } 0\leqslant x\leqslant \pi/6$$

и записать неравенство Шварца—Буняковского

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{x\sin x}\,dx\leqslant\sqrt{\int_0^{\pi/2}x\,dx\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx}=\sqrt{\frac{\pi^2}{8}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

6.8.14. *Указание*. Применить неравенство Шварца—Буняковского в виде

$$\left[\int_a^b \sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}\,dx\right]^2\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,dx.$$

6.8.15. *Указание*. Заменить $\operatorname{arctg} x=t/2$.

6.8.16. *Указание*. Если $f(x)$—четная функция, то $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$—нечетная функция, так как

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt=-\int_0^x f(-z)\,dz=-F(x)\qquad (t=-z).$$

Если же $f(x)$ нечетная функция, то $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$—четная функция, так как

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt=-\int_0^x f(-z)\,dz=F(x)\qquad (t=-z);$$

все остальные первообразные имеют вид $F(x)+C$ и поэтому тоже являются четными функциями.

6.8.17. *Указание.* Производная от интеграла I по a равна нулю: $\frac{dI}{da}=$ $=f(a+T)-f(a)=0$.

К главе VII

7.1.4. а) $\ln 2$; б) $(2/3)(2\sqrt{2}-1)$; в) $3/4$; г) 1; д) $1/2$. **7.2.2.** а) $1/2$; б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{e+1}\approx 0{,}283$. **7.2.5.** $\pi/4$. **7.2.10.** $2i/(h\sqrt{d^2+h^2})$. **7.2.13.** а) $\mu=5/3$; б) $\mu=\ln 2$; в) $\mu=8/(\ln 3)+2$. **7.2.15.** $2h/3$. **7.2.16.** $2I_0/\pi$. **7.3.4.** $35/6$. **7.3.6.** $\frac{2}{3}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{3}{5}$. **7.3.11.** $8/15$. **7.3.13.** 9. **7.3.16.** $1/(m+1)$. **7.3.19.** $64/3$. **7.3.20.** $8/3$. **7.3.21.** $2\pi-(2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})$. **7.3.22.** $0{,}75\pi$. **7.3.23.** $128/15$. **7.3.24.** $1/3$. **7.3.25.** $4/3$. **7.3.26.** $8/15$. **7.3.27.** $1/12$. **7.3.28.** $91/30$. **7.4.6.** $8/5$. **7.4.8.** $0{,}75\pi ab$. *Указание.* Кривая симметрична относительно осей координат и пересекает их в точках $x=\pm a$, $y=\pm b$.

7.4.9. а) $8/15$. *Указание.* Кривая симметрична относительно оси Ox, дважды пересекая ее в начале координат при $t=\pm 1$. Петля расположена во второй и третьей четвертях; б) $8/15$. *Указание.* Точки самопересечения кривой находятся следующим образом: $y=tx(t)$, поэтому $y(t_1)=t_1x(t_1)=t_2x(t_2)$ при $t_1\neq t_2$ и $x(t_1)=x(t_2)$ только при условии $x(t_1)=x(t_2)=0$, т. е. $t_1=0$; $t_2=2$; в) $8\sqrt{3}/5$.

7.4.10. $0{,}25\pi ab$. *Указание.* Кривая симметрична относительно обеих осей координат и дважды проходит через начало координат, образуя две петли. Поэтому достаточно вычислить четвертую часть искомой площади, отвечающей изменению t от 0 до $\pi/2$, и результат умножить на 4.

7.4.11. $3c^4\pi/(8ab)$ *Указание.* Кривая напоминает астроиду, вытянутую в вертикальном направлении.

7.5.2. а) $3\pi/2$; б) $\pi a^2/4$. *Указание.* Кривая является окружностью радиуса $a/2$, проходящей через полюс и симметричной относительно полярной оси, $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

7.5.6. $2a^2(5\pi/8-1)$. **7.5.8.** а) $\pi a^2/8$; б) $\pi a^2/8$. **7.5.9.** $a^2(7\pi/12-\sqrt{3})$. **7.5.10.** $\pi a^2/32$. *Указание.* Кривая проходит через полюс, образуя две петли, симметрично расположенные относительно оси Oy в первой и второй четвертях. Достаточно вычислить площадь одной петли, соответствующей изменению φ от 0 до $\pi/2$, и результат удвоить.

7.5.11. $(5/32)\pi a^2$. *Указание.* Кривая проходит через полюс, симметрична относительно полярной оси, расположена в I и IV четвертях. Достаточно вычислить площадь верхней части фигуры, соответствующей изменению φ от 0 до $\pi/2$, и результат удвоить. **7.5.12.** $a^2(1+\pi/6-\sqrt{3}/2)$.

7.5.13. $\pi a^2/2$. *Указание.* Кривая симметрична относительно осей координат и пересекает их только в начале координат, образуя четыре петли, по одной в каждой четверти (*четырехлепестковая роза*). Поэтому достаточно найти площадь одной петли, соответствующей изменению φ от 0 до $\pi/2$, и результат умножить на 4.

7.5.14. $\sqrt{2}\pi a^2$. *Указание.* Кривая симметрична относительно осей координат и биссектрис координатных углов; отсекает на осях равные отрезки. Начало координат—изолированная точка. Достаточно вычислить площадь восьмой части фигуры, соответствующей изменению φ от 0 до $\pi/4$, и результат умножить на 8.

7.6.2. $9\frac{2}{3}\pi$. *Указание.* Плоскость, перпендикулярная к оси Ox в точке x, пересечет шар по кругу радиуса $r=\sqrt{16-x^2}$, поэтому площадь сечения $S(x)=\pi(16-x^2)$.

7.6.5. $0{,}5\pi a^2 h$. *Указание.* Площадь треугольника, находящегося на расстоянии x от центра круга, равна $h\sqrt{a^2-x^2}$.

7.6.10. $2\pi^2 a^2 b$. **7.6.11.** 8/7 (см. **7.3.9**). **7.6.14.** $5\pi^2 a^3$. **7.6.16.** а) $2\pi ab(1+1/(3c^2))$; б) $(16/3)\,a$; в) $(1/2)\,abk^2\pi$. **7.6.17.** $(2/3)\,a^3 \operatorname{tg}\alpha$. **7.6.18.** а) 12π; б) $(16/15)\,\pi$; в) $(64/5)\,\pi$, г) π^2; д) $(64/3)\,\pi$; е) $(4/3)\,\pi a^3$. **7.6.19.** $\pi a^3/20$. **7.6.20.** $\pi^2/12$. **7.6.21.** $\dfrac{1}{4}\pi a^3(e^{2c/a}-e^{-2c/a})+\pi a^2 c=\dfrac{\pi a^3}{2}\operatorname{sh}\dfrac{2c}{a}+\pi a^2 c$.

7.6.22. $(\pi/20)(6\pi+5\sqrt{3})$. *Указание.* Абсциссы точек пересечения $x_1=-\pi/3$; $x_2=\pi/3$. **7.6.23.** $(19/48)\,\pi$. **7.6.24.** $(127/7)\,\pi$. **7.6.25.** $16\pi c^6/(105ab^2)$. *Указание.* Эволюту эллипса представить в параметрическом виде так: $x=(c^2/a)\cos^3 t$; $y=-(c^2/b)\sin^3 t$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$. **7.6.26.** $(4/3)\,\pi a^3$. **7.6.27.** $\pi^2 a^3/(4\sqrt{2})$; $(\pi a^3/4)\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-2/3\right]$. *Указание.* Перейти к полярным координатам. **7.6.28.** $(4/21)\,\pi a^3$. **7.7.2.** 112/27. **7.7.4.** $\ln\dfrac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$. **7.7.8.** а) $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; б) $2\ln(2-\sqrt{3})$. *Указание.* $x_1=-\pi/2$; $x_2=\pi/3$; в) $2\sqrt{3}/3$. **7.7.9.** $a(a+2)/2$. **7.7.10.** $10(67/27+\sqrt{5})$. **7.8.2.** $8a$. **7.8.5.** 13/3. *Указание.* Кривая пересекается с осями при $t_1=0$ и $t_2=\sqrt[4]{8}$. **7.8.7.** $4\sqrt{3}$. **7.8.8.** $16a$. **7.8.9.** $8\pi a$. *Указание.* См. рис. 79. **7.8.10.** $4(a^3-b^3)/(ab)$. **7.8.11.** $\pi^3/3$. **7.8.12.** При $t=2\pi/3$ точка $M\left[a(2\pi/3-\sqrt{3}/2),\ 3a/2\right]$. **7.9.5.** $1{,}5\pi a$. **7.9.9.** $5/12+\ln(3/2)$. **7.9.10.** $2\sqrt{2}\pi a$. *Указание.* Кривая $\rho=2\sqrt{2}a\cos(\varphi-\pi/4)$ есть окружность. **7.9.11.** $p\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$. **7.10.3.** а) $14\pi/3$; б) $62\pi/3$. **7.10.5.** $2\pi(1+4\pi/(3\sqrt{3}))$. **7.10.8.** $\pi/2$. **7.10.14.** $(34\sqrt{17}-2)\,\pi/9$. **7.10.15.** $2\pi\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$. **7.10.16.** $(56/3)\,\pi a^2$. **7.10.17.** $(2\sqrt{2}/5)\,\pi\,(e^{\pi}-2)$. **7.10.18.** $29{,}6\pi$. **7.10.19.** $4\pi^2 a^2$. **7.10.20.** $(128/5)\,\pi a^2$. **7.11.7.** $16a^2$, где a — радиус основания цилиндров. **7.11.8.** $1{,}5\pi$. **7.11.10.** а) 8/15; б) $7/50-(1/4)\operatorname{arctg}(1/2)$. **7.11.11.** а) $\pi a^2/4$; б) $(p^2/6)(3+4\sqrt{2})$; в) $(1/8)(5\pi+6\sqrt{3})$. **7.11.13.** $(a/2)(2\ln 3-1)$. **7.11.14.** $(\sqrt{2}/3)(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$ **7.11.17.** $2\pi\sqrt{3}/15$. **7.11.18.** $\pi a^2\sqrt{pq}$. **7.11.19.** $\pi ab(l^3/3c^2-l+2c/3)$. **7.11.20.** $\pi abh/3$. **7.11.21.** 12π. **7.11.22.** $((4\sqrt{3}-6)/9)\ \pi b^2 a$. **7.11.23.** $(4/21)\ \pi a^3$. **7.11.24.** а) $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)/2\right]$; б) $\dfrac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$; в) $2\pi rh$.

7.12.2. $(2/3)\,\gamma R^3$. **7.12.4.** $\pi R^4/4$. **7.12.9.** $MR^2\omega^2/4$. **7.12.11.** $\pi abhd$. **7.12.12.** πrdh^2. **7.12.13.** $(1/12)\,\pi R^2 H$. **7.13.3.** $0{,}25\pi R^3$. **7.13.7.** $M_x=(1/3)(5\sqrt{5}-1)$; $M_y=(9/8)\sqrt{5}+(1/16)\ln(2+\sqrt{5})$. **7.13.8.** $M_x=(b/2)\sqrt{a^2+b^2}$; $M_y=(a/2)\sqrt{a^2+b^2}$. **7.13.9.** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **7.13.10.** 0,15. **7.13.11.** $I_x=ab^3/12$; $I_y=a^3b/12$. **7.13.12.** $(a+3b)\,h^3/12$. **7.13.16.** $x_c=y_c=0{,}4a$. **7.13.19.** $x_c=y_c=a/5$. **7.13.26.** $x_c=R\sin\alpha/\alpha$; $y_c=0$.
7.13.28. $x_c=5a/8$; $y_c=0$. **7.13.29.** $x_c=-0{,}2(2e^{2\pi}-e^{\pi})/(e^{\pi}-e^{\pi/2})$; $y_c=0{,}2a(e^{2\pi}-2e^{\pi})/(e^{\pi}-e^{\pi/2})$. **7.13.30.** $4{,}5\pi a^3$. **7.13.31.** $x_c=0$; $y_c=4R/(3\pi)$.

7.14.1 $|(m-n)/(m+n)|$; $4|(m-n)/(m+n)|$, если m и n — оба четны; $2|(m-n)/(m+n)|$, если m и n — оба нечетны; $|(m-n)/(m+n)|$, если m и n — разной четности. *Указание.* Кривые $y^m=x^n$ и $y^n=x^m$ имеют в первой четверти две общие точки (0, 0) и (1, 1). Площадь фигуры, лежащей в первой четверти, равна $\left|\int\limits_0^1\left(x^{n/m}-x^{m/n}\right)dx\right|$. В зависимости от четности и нечетности m и n эта фигура либо симметрично отображается относительно осей координат (m, n четны) либо симметрично отображается относительно начала координат (m, n нечетны). Если m и n разной четности, то кривые ограничивают лишь площадь, лежащую в первой четверти.

7.14.3. *Указание.* Воспользоваться формулой для вычисления площади в полярных координатах.

7.14.4. *Указание.* Так как фигуры равновелики, то функция $S(x)$, входящая в формулу объема $V=\int\limits_a^b S(x)\,dx$, одна и та же, а значит, и значения интегралов также равны.

7.14.5. *Указание.* Формула непосредственно следует из формулы Симпсона

$$\int\limits_0^h f(x)\,dx=\frac{h}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{h}{2}\right)+f(h)\right],$$

для шара $S(x)=\pi(r^2-x^2)$; для конуса $S(x)=\pi r^2x^2/h^2$; для параболоида вращения $S(x)=2\pi px$ и т. д.

7.14.6. *Указание.* Разбить криволинейную трапецию на полоски ширины Δx и составить выражение для дифференциала объема $\Delta V=2\pi xy\Delta x$.

7.14.8. *Указание.* Воспользоваться формулой для вычисления длины кривой, заданной параметрически.

7.14.9. $\ln(\pi/2)$. *Указание.* Ближайшая к началу координат ($t=1$) точка с вертикальной касательной соответствует значению параметра $t=\pi/2$.

7.14.13. $2\pi\sqrt{3}/15$.

7.14.14. $\sqrt{2}\cdot z$. **7.14.16.** а) $0{,}5\ln(x+y)$, б) $\pi/4-0{,}5\arcsin x$.

К главе VIII

8.1.2. б) $(1/2)\ln 2$; в) 1; г) $1-\ln 2$; д) π; е) $1/2$.

8.1.6. а) Расходится. *Указание.* $[\ln(x^2+1)]/x>1/x$ при $x>\sqrt{e-1}$; б) сходится; в) расходится. *Указание.* $(2+\cos x)/\sqrt{x}>1/\sqrt{x}$; г) сходится; д) расходится.

8.1.17. а) 0. *Указание.* Представить интеграл как сумму двух слагаемых: $\int\limits_0^\infty\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int\limits_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int\limits_1^\infty\frac{\ln x}{1+x^2}dx$. Во втором слагаемом сделать подстановку $x=1/t$ и показать, что $\int\limits_1^\infty\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\int\limits_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx$; б) $m!/2$.

8.2.2. а) $9a^{2/3}$; б) расходится; в) расходится; г) $6\sqrt[3]{2}$; д) $\pi/3$; е) сходится при $p<1$ и расходится при $p\geqslant 1$. **8.2.7.** а) Сходится; б) расходится; в) сходится; г) сходится; д) расходится; е) сходится. **8.2.11.** а) Расходится; б) $2\sqrt{\ln 2}$; в) $51/7$. **8.2.14.** а) Сходится; б) расходится; в) расходится; г) сходится; д) сходится. **8.3.7.** а) $\pi/2$; б) 2π. **8.3.8.** $3\pi a^2$. **8.3.9.** $1/2$. **8.3.10.** $4\pi/3$.

8.3.14. mgR. *Указание.* Закон притяжения тела Землей определяется формулой $f=mgR^2/r^2$, где m — масса тела, r — расстояние тела до центра Земли. R — радиус Земли.

8.3.15. e_1. *Указание.* Электрические заряды взаимодействуют с силой e_1e_2/r^2, где e_1 и e_2 — величины зарядов, r — расстояние между ними.

8.4.1. *Указание.* Представить интеграл в виде суммы

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=\int\limits_1^a\frac{dx}{x^p\ln^q x}+\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}\qquad(a>1)$$

и применить частные признаки сходимости, учитывая, что в первом интеграле $\ln x=\ln[1+(x-1)]\sim x-1$ при $x\to 1$, а во втором интеграле при $q<0$ логарифмическая функция растет медленнее любой степенной функции.

8.4.2. *Указание.* Применив подстановку $x^q=t$, привести заданный интеграл к виду $\pm\frac{1}{q}\int\limits_0^{+\infty} t^{(p+1)/q-1}\sin t\,dt$. Представить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^{(p+1)/q-1}\sin t\,dt$ в виде суммы $\int\limits_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$, где $\alpha=1-(p+1)/q$, и показать, что интеграл сходится абсолютно при $1<\alpha<2$ и условно при $0<\alpha\leqslant 1$. Заметим, что при $(p+1)/q=0$ интеграл приводится к условно сходящемуся интегралу $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$, а при $(p+1)/q=-1$ — к расходящемуся интегралу $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt$.

8.4.3. *Указание.* Представить заданный интеграл в виде суммы $\int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx+\int\limits_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ и применить частный признак сравнения.

8.4.4. *Указание.* Если $|\alpha|\neq|\beta|$, то $\int\limits_0^T \sin\alpha x\cdot\sin\beta x\,dx$ ограничен.

8.4.5. *Указание.* Заменой переменной $t=x^2$ интеграл приводится к гамма-функции Эйлера.

8.4.6. *Указание.* $\int\limits_a^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\,dx=\int\limits_{a\alpha}^\infty\frac{f(x)}{x}\,dx-\int\limits_{a\beta}^\infty\frac{f(x)}{x}\,dx=\int\limits_{\alpha a}^{a\beta}\frac{f(x)}{x}\,dx=$

$=A\ln\frac{\beta}{\alpha}+\int\limits_{\alpha a}^{\beta a}\frac{f(x)-A}{x}\,dx$. Применив обобщенную теорему о среднем, показать, что последний интеграл стремится к нулю при $a\longrightarrow 0$.

8.4.7. *Указание.* Для первого интеграла взять функцию $f(x)=e^{-x}$, для второго — функцию $f(x)=\cos x$ и воспользоваться результатами задачи **8.4.6.**

8.4.8. Сходится при $m<3$, расходится при $m\geqslant 3$. *Указание.* Воспользоваться эквивалентностью $1-\cos x\sim x^2/2$ при $x\longrightarrow 0$.

8.4.9. *Указание.* Представить $\int\limits_0^\pi\frac{dx}{(\sin x)^k}$ в виде суммы двух интегралов $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{(\sin x)^k}+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{(\sin x)^k}$; подстановкой $x=\pi-t$ второй интеграл свести к первому и воспользоваться эквивалентностью $\sin x\sim x$ при $x\longrightarrow 0$.

8.4.10. *Указание.* $\int\limits_0^\infty\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^s}\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^s}\,dx+$

$+\int\limits_{\pi/2}^\infty\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^s}\,dx$. Подынтегральная функция первого слагаемого в правой части при $x\longrightarrow 0$ является бесконечно большой порядка $s-3$. По частному признаку сравнения первый интеграл сходится абсолютно при $s-3<1$, т. е. $s<4$, и расходится при $s\geqslant 4$. Второе слагаемое в правой части сходится абсолютно при $s>1$, так как функция $\sin x(1-\cos x)$ ограничена. Если же $0<s\leqslant 1$, то второй интеграл сходится условно как разность двух

условно сходящихся интегралов $\int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^s}\,dx$ и $\int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x^s}\,dx$ (см. задачу 8.1.13).

8.4.11. *Указание.* Интеграл (2) может расходиться. Например, пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi, \\ -1, & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi. \end{cases}$$

Интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится (см. задачу 8.1.13). Однако $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\varphi(x)\,dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится (см. ту же задачу). Если же интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то и интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$ сходится абсолютно: если $|\varphi(x)| < C$, то $|f(x)\varphi(x)| < C|f(x)|$, и остается использовать теорему сравнения.

8.4.12. *Указание.* Преобразовать интеграл $f(x)$ подстановкой $y = \pi/2 - z$ к виду $f(x) = \int\limits_{\pi/2}^{\pi/2 - x} \ln \sin z\,dz$. Учитывая, что $\sin z = 2\sin(z/2)\cdot\cos(z/2)$, привести последний интеграл к сумме трех интегралов.

8.4.13. *Указание.* Положив $u = \ln\cos x$, $\cos 2nx\,dx = dv$, проинтегрировать по частям и получить равенство $I_n = \frac{1}{2n}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2nx\,\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$, $n \neq 0$. Так как

$$\sin 2nx = \sin(2n-2)x\cdot\cos 2x + \sin 2x\cdot\cos(2n-2)x,$$

то

$$I_n = \frac{1}{2n}\left[-\int\limits_0^{\pi/2} \sin(2n-2)x\,\frac{\sin x}{\cos x}\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} \sin(2n-2)x\cdot\sin 2x\,dx + 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\cdot\cos(2n-2)x\,dx\right].$$

Непосредственным вычислением проверяется, что при $n \geqslant 2$ второе и третье слагаемые равны нулю. Поэтому при $n \geqslant 2$

$$I_n = -\frac{1}{2n}\int\limits_0^{\pi/2} \sin(2n-2)x\,\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\frac{n-1}{n}I_{n-1}.$$

Так как $I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x\,\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \frac{\pi}{4}$, то $I_2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$, $I_3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3\cdot 4}$ и по индукции $I_n = (-1)^{n-1}\pi/(4n)$.

Исаак Абрамович Марон

Дифференциальное и интегральное исчисление
в примерах и задачах
(функции одной переменной)

М., 1970 г., 400 стр. с илл.

Редакторы: *Л. З. Румшиский, Н П. Рябенькая*
Техн. редактор *А. А. Благовещенская*
Корректор *Г. С. Смоликова*

Сдано в набор 1/VI 1970 г. Подписано к печати 29/IX 1970 г. Бумага $60 \times 90^1/_{16}$ Физ. печ. л 25. Условн. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 25,71. Тираж 110 000 экз Т-15401 Цена книги 82 коп. Заказ № 1128

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28