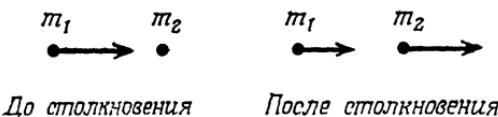


## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

**I. 1.1.** Пусть  $\mathbf{P}_3$  и  $\mathbf{P}_4$  — импульсы частиц соответственно 1 и 2 после столкновения, а  $|\mathbf{P}_4|$  — максимально возможный импульс частицы массой  $m_2$ , когда в системе, связанной с центром масс, частица 1 после столкновения движется назад. При этом  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_3$  и  $\mathbf{P}_4$  имеют одно и то же направление.



а)  $|\mathbf{P}_4|$  можно найти из уравнений, выражающих законы сохранения импульса и энергии:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4, \quad (1)$$

$$E_1 + m_2 = E_3 + E_4, \quad (2)$$

где

$$E_1 = \sqrt{\mathbf{P}_1^2 + m_1^2}, \quad E_3 = \sqrt{\mathbf{P}_3^2 + m_1^2} \quad \text{и} \quad E_4 = \sqrt{\mathbf{P}_4^2 + m_2^2}.$$

Но удобнее использовать 4-векторы. Введем 4-векторы

$$P_i = (\mathbf{P}_i, jE_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

При этом для удобства мы приняли  $c = 1$ , а  $j = \sqrt{-1}$ . Тогда уравнения (1) и (2) можно заменить одним уравнением

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4, \quad (3)$$

или

$$P_3 = P_1 + P_2 - P_4.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$P_3^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_4^2 + 2(P_1 \cdot P_2) - 2(P_1 \cdot P_4) - 2(P_2 \cdot P_4),$$

которое является инвариантом, и воспользуемся следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} P_i^2 &= -m_i^2, \\ P_i \cdot P_I &= -E_i E_I + \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_I, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Отсюда имеем

$$-m_1^2 = -m_1^2 - 2m_2^2 - 2m_2E_1 + 2m_2E_4 + 2E_1E_4 - 2\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_4;$$

это соотношение можно упростить, учитывая, что  $\mathbf{P}_4$  параллельно  $\mathbf{P}_1$ . Таким образом, можно написать уравнение

$$(m_2 + E_1) \sqrt{\mathbf{P}_4^2 + m_2^2} - |\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_4| - (m_2^2 + m_2E_1) = 0, \quad (5)$$

откуда получаем

$$|\mathbf{P}_4| = \frac{2m_2(m_2 + E_1)|\mathbf{P}_1|}{(m_2 + E_1)^2 - |\mathbf{F}_1|^2}. \quad (6)$$

При этом мы отбросили второе, тривиальное решение уравнения (5), а именно  $|\mathbf{P}_4| = 0$ .

б) Дано

$$|\mathbf{P}_1| = m_1 = 938,2 \text{ МэВ.}$$

Следовательно,

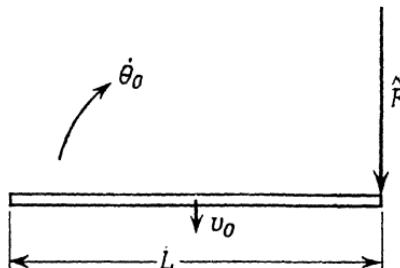
$$E_1 = \sqrt{\mathbf{P}_1^2 + m_1^2} = 938,2 \cdot \sqrt{2}.$$

Подставляя в (6) эти значения и  $m_2 = 0,5$  МэВ, находим максимальный импульс электрона после столкновения:

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}_4| &= \frac{2(0,5)(0,5 + 938,2\sqrt{2})}{(0,5 + 938,2\sqrt{2})^2 - (938,2)^2} 938,2 = \\ &= \frac{1327}{(1327)^2 - (938,2)^2} 938,2 = 1,4 \text{ МэВ/с.} \end{aligned}$$

### I. 1.2.

а) Пусть  $v_0$  — скорость центра масс стержня, а  $\dot{\theta}_0$  — угловая скорость вращения стержня относительно центра масс.



В случае импульсного воздействия справедливы следующие уравнения движения:

$$\hat{F} = mv_0 \quad (1)$$

и

$$\frac{\hat{F}L}{2} = I\dot{\theta}_0,$$

или

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\hat{F}L}{2I}, \quad (2)$$

где  $I = (1/3)m(L/2)^2$  — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс.

Если за время  $t$  стержень совершает полный оборот, то

$$\dot{\theta}_0 t = 2\pi, \quad (3)$$

откуда

$$t = \frac{2\pi}{\dot{\theta}_0}.$$

Следовательно, за время полного оборота центр стержня переместится на расстояние

$$S = v_0 t = \frac{\hat{F}}{m} \frac{2\pi}{\dot{\theta}_0}.$$

Подставляя сюда выражение (2), находим

$$S = \frac{\hat{F}}{m} \frac{\pi m L^2}{3\hat{F}L} = \frac{\pi L}{3}. \quad (4)$$

б) Энергия поступательного движения

$$T_t = \frac{m}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{\hat{F}^2}{m^2} = \frac{1}{2} \frac{\hat{F}^2}{m}. \quad (5)$$

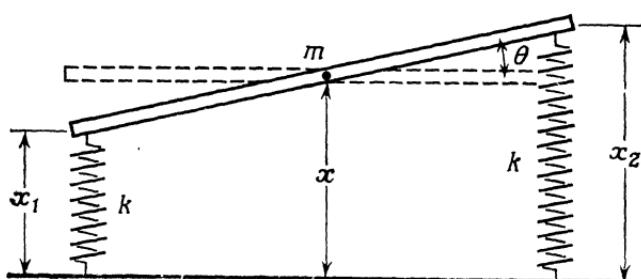
Энергия вращательного движения

$$T_r = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_0^2 = \frac{1}{2} I \left( \frac{L \hat{F}}{2I} \right)^2 = \frac{3}{2} \frac{\hat{F}^2}{m}. \quad (6)$$

Полная кинетическая энергия стержня равна их сумме:

$$T_{\text{полн}} = T_t + T_r = \frac{2\hat{F}^2}{m}.$$

**I. 1.3.** Пусть  $b$  — длина каждой пружины в состоянии покоя (заметьте, что в поле силы тяжести она не совпадает с длиной свободной пружины:  $b = \text{Длина свободной пружины} - mg/2k$ ), а  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x$  — соответственно длины пружин 1 и 2 и высота центра масс стержня в момент времени  $t$ .



Для абсолютно жесткого стержня  $x_1 + x_2 = 2x$ . В соответствии со вторым законом Ньютона имеем

$$m\ddot{x} = -k(x_1 - b) - k(x_2 - b),$$

или

$$m\ddot{x} = -k(x_1 + x_2) + 2kb,$$

откуда

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m}(2kx - 2kb) = -\frac{2k}{m}(x - b). \quad (1)$$

Положим теперь

$$x_2 = x + \frac{L}{2}\theta \quad \text{и} \quad x_1 = x - \frac{L}{2}\theta.$$

Из уравнения

$$\dot{J}_0 = \text{Вращающий момент}$$

получаем

$$I\ddot{\theta} = -k(x_2 - b)\frac{L}{2} + k(x_1 - b)\frac{L}{2},$$

или, поскольку  $x_2 - x_1 = L\theta$ ,

$$I\ddot{\theta} = \frac{-kL}{2}(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}kL^2\theta. \quad (2)$$

Подставляя сюда  $I = mL^2/12$ , получаем

$$\ddot{\theta} + \frac{6k}{m}\theta = 0. \quad (3)$$

Решения уравнений (1) и (3) записываются соответственно в виде

$$x = A \cos(\omega_1 t + B), \quad (4)$$

$$\theta = C \cos(\omega_2 t + D), \quad (5)$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

Запишем начальные условия при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} x &= \left(b - \frac{a}{2}\right), \\ \theta &= \frac{a}{L}, \\ \dot{x} &= 0 \quad \text{и} \quad \dot{\theta} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4) и (5), имеем

$$b - \frac{a}{2} = A \cos B, \quad (7)$$

$$0 = -A\omega_1 \sin B, \quad (8)$$

$$\frac{a}{L} = C \cos D, \quad (9)$$

$$0 = -C\omega_2 \sin D. \quad (10)$$

Из (8) и (10) следует

$$B = D = 0, \quad (11)$$

а из (7) и (9) с учетом (11)

$$A = b - \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad C = \frac{a}{L}. \quad (12)$$

После подстановки (11) и (12) в (4) и (5) получаем

$$x = \frac{2b - a}{2} \cos \omega_1 t, \quad \text{где} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}},$$

и

$$\theta = \frac{a}{L} \cos \omega_2 t, \quad \text{где} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

Обе нормальные моды колебаний определяются выражениями

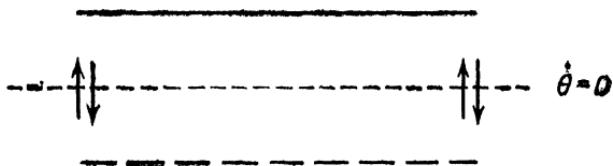
$$X_1 = x_1 + x_2 = (2b - a) \cos \omega_1 t, \quad (13)$$

$$X_2 = x_2 - x_1 = a \cos \omega_2 t. \quad (14)$$

В случае  $X_1 = 0$  имеем  $x_2 = -x_1$ , или моду  $X_2$ .



Если же  $X_2 = 0$ , то имеем  $x_2 = x_1$ , или моду  $X_1$ .



#### I. 1.4.

a) Матрица  $A$  — симметрическая, т. е.  $A_{ij} = A_{ji}$ . Мы имеем

$$\sum_i A_{ij} \psi_i = a \psi_i; \quad (1)$$

здесь  $\psi_i$  — собственный вектор матрицы  $A$  и  $a$  — соответствующее ему собственное значение матрицы  $A$ . Умножим (1) на  $\psi_i^*$  слева и просуммируем по всем  $i$ :

$$\sum_{i,j} \psi_i^* A_{ij} \psi_j = a \sum_i \psi_i^* \psi_i. \quad (2)$$

Перейдем от (1) к его комплексно сопряженному выражению и умножим обе его части на  $\psi_i$  слева:

$$\sum_j A_{ij}^* \psi_j^* = a^* \psi_i^*, \quad (3)$$

$$\sum_{i,j} \psi_i A_{ij}^* \psi_j^* = a^* \sum_i \psi_i \psi_i^*. \quad (4)$$

В равенстве (4)  $\psi_i$  и  $\psi_j^*$  можно поменять местами:

$$\sum_{i,j} \psi_j A_{ij}^* \psi_i = a^* \sum_i \psi_i^* \psi_i. \quad (5)$$

Поскольку  $A$  — действительная матрица, то  $A^* = A$ . Более того, если она еще и симметрическая, то  $A_{ij}^* = A_{ji}$ . Меняя местами индексы  $i$  и  $j$  в левой части выражения (5) и учитывая свойство  $A_{ij}^* = A_{ji}$ , получаем

$$\sum_{i,j} \psi_i^* A_{ij} \psi_j = a^* \sum_i \psi_i^* \psi_i. \quad (6)$$

Сравнивая выражения (2) и (6), заключаем, что  $a = a^*$ , т. е.  $a$  — действительная величина.

б) Пусть  $a$  — одно из собственных значений, тогда

$$\sum_j A_{ij} \psi_j = a \psi_i; \quad (7)$$

здесь  $A_{ij}$  — элементы действительной матрицы, которая не является симметрической. Перейдем в (7) к комплексно сопряженным величинам:

$$\sum_j A_{ij} \psi_j^* = a^* \psi_i^*.$$

Отсюда следует, что  $a^*$  также представляет собой собственное значение матрицы  $A$ .

**I.1.5.** В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , уравнение движения записывается в виде

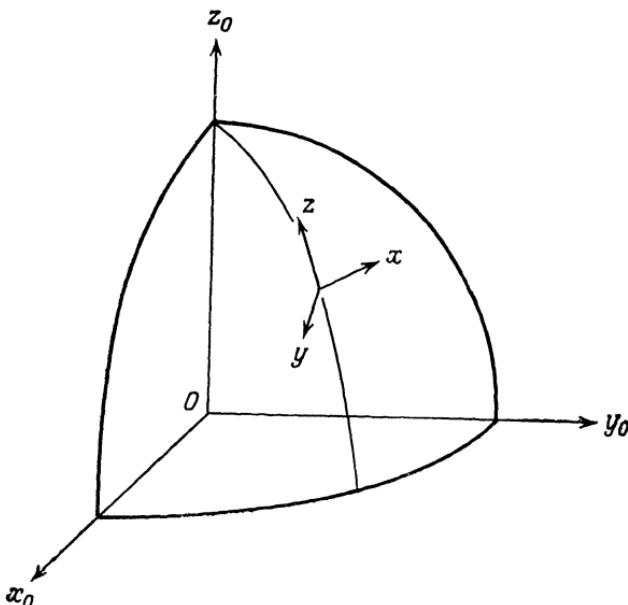
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} - 2\omega \times \mathbf{v} - \omega \times (\omega \times \mathbf{R}), \quad (1)$$

где

$$\frac{\mathbf{F}}{m} - \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) = \mathbf{g}$$

— действующее ускорение свободного падения, а  $\omega = 2\pi/86400 = 7 \cdot 10^{-5}$  рад/с — угловая скорость вращения Земли. В результате уравнение (1) принимает вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - 2\omega \times \mathbf{v}. \quad (2)$$



В системе отсчета, показанной на рисунке, получаем

$$a_y = g, \quad \text{или} \quad v_y = a_y t = gt, \quad (3)$$

$$a_x = 2\omega v_y \sin 45^\circ. \quad (4)$$

Следовательно,

$$\dot{x} = \int_0^t a_x dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega g t^2$$

и

$$x = \int_0^t \dot{x} dt = \frac{\sqrt{2}}{6} \omega g t^3. \quad (5)$$

Из выражения (3) имеем

$$h = \frac{1}{2} g t^2, \quad \text{откуда} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (6)$$

Подставляя выражение для  $t$  в (5), находим

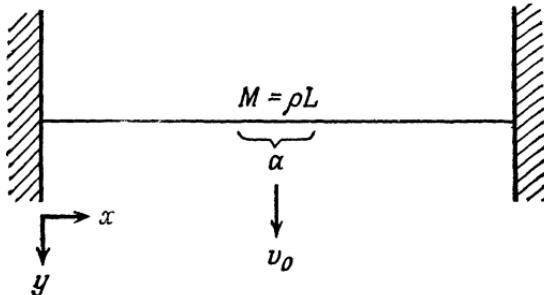
$$x = \frac{2\omega}{3} \sqrt{\frac{h^3}{g}}.$$

Тело упадет к востоку от отвеса, опущенного из исходной точки.

**I. 1.6.** Движение струны описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где  $T$  — натяжение, а  $\rho$  — линейная плотность струны.



Начальные условия при  $t = 0$  записываются в виде

$$y = 0 \text{ при всех значениях } x,$$

$$\dot{y} = \begin{cases} 0 & \text{при } \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{2}\right) < x < \left(\frac{L}{2} - \frac{a}{2}\right), \\ v_0 & \text{при } \left(\frac{L}{2} - \frac{a}{2}\right) < x < \left(\frac{L}{2} + \frac{a}{2}\right). \end{cases}$$

Запишем общее решение уравнения (1):

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi}{L} t + B_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (2)$$

При  $t = 0$  имеем  $y = 0$ . Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x = 0 \text{ при любом значении } x.$$

Это справедливо только в том случае, когда все коэффициенты  $A_n$  равны нулю:

$$A_n = 0 \text{ при любом значении } n. \quad (3)$$

Таким образом, из решения (2) имеем

$$\dot{y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (t = 0). \quad (4)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{n\pi} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \int_0^L \dot{y}(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \\ &= \frac{2v_0}{n\pi} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \int_{(L-a)/2}^{(L+a)/2} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \\ &= \frac{2v_0 L}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \left\{ \cos \left[ \frac{n\pi}{2} \left( 1 - \frac{a}{L} \right) \right] - \cos \left[ \frac{n\pi}{2} \left( 1 + \frac{a}{L} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Искомые амплитуды  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  первых трех низкочастотных гармоник можно определить, подставляя в (5) значения  $n = 1, 2$  и  $3^1$ .

**I. 1.7.** Число молекул воздуха, которым за промежуток времени  $\Delta t$  сообщена скорость  $V$ , пропорционально  $AV\Delta t$ . Следовательно, полный импульс  $\Delta P$  этих молекул пропорционален  $AV^2\Delta t$ . Сила сопротивления воздуха

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t},$$

как видно из предыдущего, пропорциональна  $AV^2$ .

**I. 1.8.** Чтобы тела парили в невесомости, центробежная сила на экваторе должна уравновешивать силу земного притяжения, т. е.

$$R\dot{\theta}^2 = g.$$

<sup>1)</sup> Дальнейшее упрощение формулы (5) дает

$$B_n = \frac{4v_0 L}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi a}{2L} \approx \frac{2v_0 a}{n\pi} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

В результате имеем

$$B_1 = \frac{2v_0 a}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{T}}, \quad B_2 = 0, \quad |B_3| = B_1/3.$$

Подставляя сюда  $R = 6 \cdot 10^6$  м и  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, получаем

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{R}} \approx \frac{1}{800} \text{ с}^{-1},$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} \approx 1600\pi \text{ с} \approx 1,5 \text{ ч.}$$

Примерно такой период обращения имеют искусственные спутники Земли на малых высотах.

**I. 1.9.** Циклическими называются такие координаты, от которых гамильтониан не зависит в явном виде. Поскольку

$$\dot{P}_c = \frac{\partial H}{\partial x_c} = 0,$$

то импульсы, сопряженные с циклическими координатами, являются интегралами движения.

### I. 2.1.

а) Пусть  $a$  — действительное собственное значение косоэрмитовой матрицы  $A$ , т. е.

$$A\psi = a\psi. \quad (1)$$

Умножая обе части равенства (1) на  $\psi^+$  слева, получаем

$$\psi^+ A \psi = a \psi^+ \psi. \quad (2)$$

Для эрмитово-сопряженной матрицы имеем

$$\psi^+ A^+ = a \psi^+ \quad (3)$$

(здесь мы воспользовались условием  $a^* = a$ ). Если мы умножим обе части равенства (3) на  $\psi$  справа, то получим

$$\psi^+ A^+ \psi = a \psi^+ \psi. \quad (4)$$

Но  $A^+ = -A$ , и (4) принимает вид

$$\psi^+ A \psi = -a \psi^+ \psi. \quad (5)$$

Из (2) и (5) следует

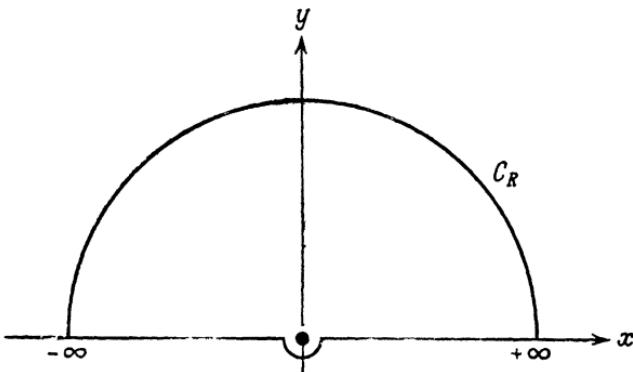
$$a \equiv 0. \quad (6)$$

б) Нам нужно вычислить

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Поскольку функция  $\sin z$  не определена при  $z = x + iy \rightarrow \infty$ , мы должны выразить функцию  $\sin^2 x$  через  $e^{ix}$ . Имеем

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \operatorname{Re} \frac{1 - e^{2ix}}{2}.$$



В верхней полуплоскости  $e^{iz}$  убывает экспоненциально, и, следовательно, интеграл

$$\int \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz$$

по дуге  $C_R$  обращается в нуль. Теперь можно вычислить  $I$ , заменив вначале  $x$  на  $z$  и выполнив затем интегрирование вдоль границы верхнего полукруга:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{iz}}{2x^2} dx + \operatorname{Re} \int_{C_R} \frac{1 - e^{iz}}{2z^2} dz = \\ &= \operatorname{Re} \oint \frac{1 - e^{iz}}{2z^2} dz = \operatorname{Re} \{ \pi i \operatorname{Выч}[f(z), 0] \}, \end{aligned}$$

где  $\operatorname{Выч}[f(z), 0]$  — вычет подынтегральной функции в точке  $z = 0$ . В данном случае подынтегральная функция имеет в этой точке полюс порядка  $n = 2$ . Таким образом,

$$\operatorname{Выч}[f(z), 0] = \frac{d}{dx} \left( \frac{1 - e^{iz}}{2} \right) \Big|_{x=0} = -i.$$

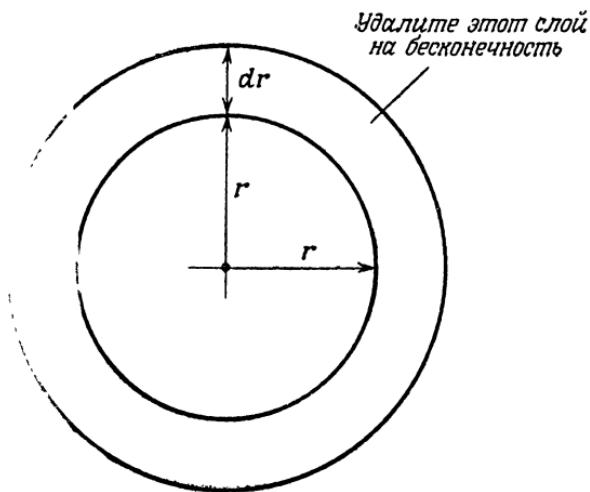
Окончательно получаем

$$I = \operatorname{Re}(\pi) = \pi.$$

### 1.2.2.

а) Будем производить эту разрушительную работу постепенно, удаляя каждый раз с Земли тонкий слой толщиной  $dr$ .

Чтобы удалить такой слой на бесконечность, нужно затратить энергию, или совершить работу, численно равную потенциальной



энергии взаимодействия этого слоя с оставшейся массой, но взятую с обратным знаком:

$$d(\text{Работа}) = -d(\text{Потенц. эн.}) = G \frac{M_r dm_r}{r}, \quad (1)$$

где  $M_r = (4\pi/3)\rho r^3$  — масса, заключенная внутри сферы радиусом  $r$ ,  $dm_r = -4\pi\rho r^2 dr$  — масса сферического слоя толщиной  $-dr$  и радиусом  $r$ , а  $\rho$  — плотность Земли. После подстановки получаем

$$d(\text{Работа}) = -d(\text{Потенц. эн.}) = -G \frac{16\pi^2}{3} \rho^2 r^4 dr. \quad (2)$$

Полная работа, которую необходимо произвести, равна интегралу от правой части равенства (2) в пределах от  $r=R$  до  $r=0$ :

$$\text{Работа} = -G \frac{(4\pi)^2}{3} \rho^2 \int_R^0 r^4 dr = \frac{G (4\pi)^2}{3} \rho^2 \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}; \quad (3)$$

здесь  $M$  — масса, а  $R$  — радиус Земли.

6) Предположим, что вся потенциальная энергия  $(3/5) \times (GM^2/R)$  преобразуется в тепловую. Считая теплоемкость Земли постоянной, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} = MC_V \Delta T, \quad (4)$$

где  $\Delta T$  — приращение температуры Земли вследствие поглощения ею выделенного тепла. Полагая

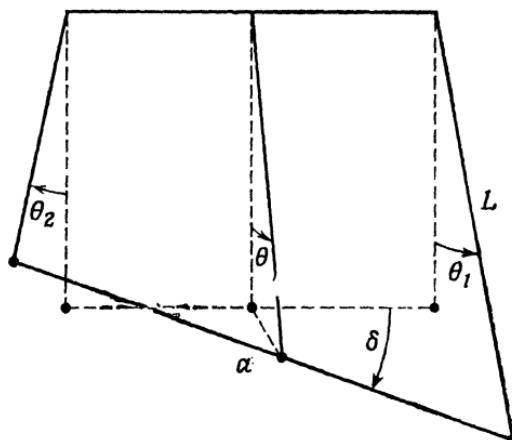
$$C_V \approx 0,3 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{К}) = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

находим

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{3}{5} G \frac{M}{R} \frac{1}{C_V} = \frac{3}{5} g R \frac{1}{C_V} \approx \\ &\approx \frac{3}{5} \cdot 10 \cdot 6 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{C_V} = \frac{36 \cdot 10^6}{C_V} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ К}. \end{aligned}$$

Действительно, Земля бы расплавилась.

### I. 2.3.



а) Пусть  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы отклонения нитей от вертикали. Угловая скорость центра масс стержня

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).$$

Кинетическая энергия поступательного движения стержня равна

$$T_t = \frac{m}{2} L^2 \dot{\theta}^2 = \frac{m}{8} L^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2. \quad (1)$$

Между углами  $\delta$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  существует соотношение

$$\delta = \frac{L}{a} (\theta_1 - \theta_2).$$

Кинетическая энергия вращательного движения записывается в виде

$$T_r = I \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{IL^2}{2a^2} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 = \frac{mL^2}{24} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2, \quad (2)$$

где  $I = ma^2/12$  — момент инерции стержня,

Потенциальная энергия (при малых углах  $\theta_1$  и  $\theta_2$ ) равна

$$V = \frac{1}{2} mgL [(1 - \cos \theta_1) + (1 - \cos \theta_2)] \approx \frac{mgL}{4} (\theta_1^2 + \theta_2^2); \quad (3)$$

здесь мы воспользовались разложением функций  $\cos \theta_{1,2}$  в степенной ряд. Из выражений (1), (2) и (3) получаем выражение для лагранжиана:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{mL^2}{8} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{mL^2}{24} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 - \frac{1}{4} mgL (\theta_1^2 + \theta_2^2), \quad (4)$$

где  $T = T_t + T_r$ .

Из уравнения Лагранжа следуют два уравнения движения:

$$\frac{mL^2}{4} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{mL^2}{12} (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \frac{1}{2} mgL \theta_1 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{mL^2}{4} (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1) + \frac{mL^2}{12} (\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1) + \frac{1}{2} mgL \theta_2 = 0. \quad (6)$$

Суммируя оба уравнения и вычитая одно из другого, получаем

$$\frac{mL^2}{3} (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + mgL (\theta_1 - \theta_2) = 0,$$

или

$$(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \frac{3g}{L} (\theta_1 - \theta_2) = 0; \quad (7)$$

$$mL^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + mgL (\theta_1 + \theta_2) = 0,$$

или

$$(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{g}{L} (\theta_1 + \theta_2) = 0. \quad (8)$$

Решения уравнений (7) и (8) можно записать в виде

$$X_1 = \theta_1 - \theta_2 = 2A \sin \omega_1 t + 2A' \cos \omega_1 t,$$

$$X_2 = \theta_1 + \theta_2 = 2B \sin \omega_2 t + 2B' \cos \omega_2 t;$$

здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — частоты, соответствующие этим решениям:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}}, \quad (9)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (10)$$

Удовлетворяя начальным условиям  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = 0$ , получаем

$$A' = B' = 0. \quad (11)$$

Следовательно,

$$\theta_1 = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t, \quad (12)$$

$$\theta_2 = -A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t. \quad (13)$$

Начальные значения  $\dot{\theta}_1$  и  $\dot{\theta}_2$  при  $t = 0$  можно найти из выражений для импульса

$$\hat{P} \frac{a}{2} = I\dot{\theta} = \frac{ma^2}{12} \cdot \frac{L}{a} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = \frac{maL}{12} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (14)$$

$$\hat{P} = mv = mL\dot{\theta} = m \frac{L}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2), \quad (15)$$

откуда

$$\dot{\theta}_1 = \frac{4\hat{P}}{mL}, \quad (16)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{2\hat{P}}{mL}. \quad (17)$$

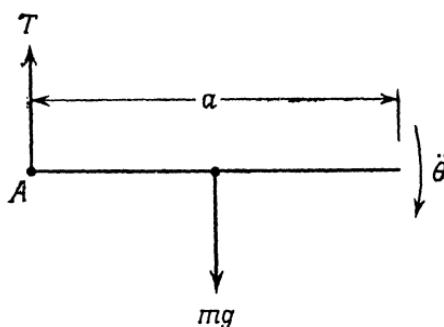
Из (12), (13), (16) и (17) определяем амплитуды нормальных мод:

$$A = \frac{3\hat{P}}{mL\omega_1} = \frac{3\hat{P}}{m\sqrt{3Lg}},$$

$$B = \frac{\hat{P}}{mL\omega_2} = \frac{\hat{P}}{m\sqrt{Lg}}.$$

б) Пусть  $T$  — натяжение нити. В соответствии со вторым законом Ньютона имеем

$$mg - T = \frac{ma}{2} \ddot{\theta}. \quad (18)$$



Кроме того, имеем уравнение для врачающего момента относительно точки  $A$ :

$$mg \frac{a}{2} = I\ddot{\theta} = \frac{m}{3} a^2 \ddot{\theta}. \quad (19)$$

Подставляя  $\ddot{\theta}$  из уравнения (19) в (18), находим

$$T = \frac{1}{4} mg. \quad (20)$$

#### I. 2.4.

а) В случае круговой орбиты сила притяжения  $-dV/dr$  должна быть равна центростремительной силе:

$$\frac{v^2}{r} = 3Kr^2,$$

откуда

$$v = r\sqrt{3Kr} = a\sqrt{3Ka}. \quad (1)$$

При этом кинетическая энергия частицы дается выражением

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3Kmr^3}{2} = \frac{3Kma^3}{2}, \quad (2)$$

а момент импульса частицы

$$J = mr^2\dot{\theta} = mrv = mr^2\sqrt{3Kr} = ma^2\sqrt{3Ka}, \quad (3)$$

где использовано соотношение  $\dot{\theta} = v/r = v/a$ .

б) Зная угловую скорость  $\dot{\theta} = \sqrt{3Ka}$ , находим период кругового движения

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3Ka}}.$$

в) После воздействия возмущения расстояние частицы от центра будет меняться вблизи  $r = a$  по некоторому закону  $r = r(t)$ . Запишем  $r$  в виде  $r = a + x$ , где  $x$  — малая величина. Движение по  $x$  в первом приближении описывается уравнением

$$\ddot{x} + \left[ \frac{3V'(a)}{a} + V''(a) \right] x = 0, \quad (4)$$

где

$$V'(a) = \frac{dV(r)}{dr} \Big|_{r=a} = 3Ka^2,$$

$$V''(a) = \frac{d^2V(r)}{dr^2} \Big|_{r=a} = 6Ka.$$

Подставляя полученные выражения для  $V'(a)$  и  $V''(a)$  в (4), приходим к уравнению гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + 15Kax = 0$$

с частотой

$$\omega = \sqrt{15Ka}.$$

**I. 2.5.**

Введем следующие 4-векторы, условившись считать  $c = 1$  и  $j = \sqrt{-1}$ :

$$\begin{aligned} P_1 &= (\mathbf{P}_1, jE_1), & P_3 &= (\mathbf{P}_3, jE_3), \\ P_2 &= (\mathbf{P}_2, j|\mathbf{P}_2|), & P_4 &= (\mathbf{P}_4, j|\mathbf{P}_4|)^1). \end{aligned}$$

Из законов сохранения импульса и энергии следует

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4, \quad (1)$$

или

$$P_3 = P_1 + P_2 - P_4.$$

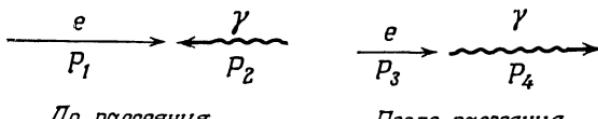
После возведения в квадрат получаем

$$\begin{aligned} -m_e^2 &= -m_e^2 + 2(E_1 - |\mathbf{P}_1| \cos \theta_{14}) E_4 - 2(E_1 - |\mathbf{P}_1| \cos \theta_{12}) E_2 + \\ &\quad + 2(1 - \cos \theta_{24}) E_2 E_4. \end{aligned}$$

(Замечание. Вернитесь к решению задачи I.1.1 и обратите внимание на некоторые отличия, возникшие на данном этапе решения.) Отсюда находим  $E_4$ :

$$E_4 = \frac{(E_1 - |\mathbf{P}_1| \cos \theta_{12}) E_2}{(E_1 - |\mathbf{P}_1| \cos \theta_{14}) + (1 - \cos \theta_{24}) E_2}. \quad (2)$$

При энергии электронов 20 ГэВ величина  $m_e$  ничтожно мала по сравнению с  $E_1$ , следовательно,  $E_1 \approx |\mathbf{P}_1|$ . Чтобы получить максимальную величину  $E_4$ , следует принять  $\cos \theta_{12} = -1$ ,  $\cos \theta_{14} = 1$  и  $\cos \theta_{24} = -1$ . При этом вектор  $\mathbf{P}_4$  по направлению совпадает с  $\mathbf{P}_1$  и противоположен  $\mathbf{P}_2$ .



Из (2) следует

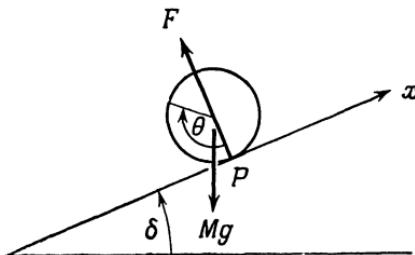
$$E_4 \approx \frac{2E_1}{2E_2} E_2 = E_1,$$

т. е. энергия рассеянного фотона почти совпадает с энергией

<sup>1)</sup> Для фотонов  $E_2 = |\mathbf{P}_2|$  и  $E_4 = |\mathbf{P}_4|$ . В дальнейших формулах  $\theta_{12}$  обозначает угол между направлениями импульсов электрона и фотона до рассеяния,  $\theta_{14}$  — угол между направлениями импульсов налетающего электрона и рассеянного фотона,  $\theta_{24}$  — угол рассеяния фотона. Приводимый в данной задаче рисунок поясняет рассеяние фотонов на встречном пучке быстрых электронов, когда  $\theta_{12} = \theta_{24} = \pi$  и  $\theta_{14} = 0$ . — Прим. перев.

встречного электрона.

### I. 3.1.



а) Пусть  $P$  — положение мгновенного центра вращения шарика на наклонной плоскости в момент времени  $t$ . Вращение шарика относительно этого центра описывается уравнением

$$-Mga \sin \delta = I_0 \ddot{\theta}, \quad (1)$$

где  $I_0$  — момент инерции шарика относительно оси, проходящей через точку  $P$ . Согласно теореме о параллельных осях<sup>1)</sup>, имеем

$$I_0 = \frac{2}{5} Ma^2 + Ma^2 = \frac{7}{5} Ma^2.$$

Следовательно, ускорение центра масс шарика равно

$$\ddot{x} = a\ddot{\theta} = -\frac{5}{7} g \sin \delta. \quad (2)$$

б) Из закона сохранения энергии следует, что в исходной точке шарик должен обладать той же скоростью  $v_0$ , с которой его толкнули, но противоположно направленной. Для движения с постоянным ускорением

$$v_f = v_i + \ddot{x}t, \quad (3)$$

где  $v_i$  и  $v_f$  — начальная и конечная скорости соответственно. Подставляя сюда  $v_f = -v_0$ ,  $v_i = v_0$  и  $\ddot{x} = -(\frac{5}{7})g \sin \delta$ , получаем

$$2v_0 = \frac{5}{7} gt \sin \delta, \quad (4)$$

откуда

$$t = \frac{14v_0}{5g \sin \delta}. \quad (5)$$

### I. 3.2.

а) Частица имеет массу покоя  $m_0 = 1000 \text{ МэВ}/c^2$  и обладает импульсом  $P = 1000 \text{ МэВ}/c$ . Скорость частицы равна<sup>2)</sup>

$$v = \frac{Pc^2}{mc^2} = \frac{1000}{\sqrt{2} \cdot 1000} c = \frac{c}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Она называется также теоремой Штейнера. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> В формуле (1)  $m = \sqrt{2} m_0$ . Это следует из релятивистского соотношения  $mc^2 = \sqrt{P^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ . — Прим. перев.

Найдем среднее время жизни частицы:

$$\bar{T} = (1 - \beta^2)^{-1/2} T_0 = \frac{m}{m_0} T_0 = \sqrt{2} \cdot 10^{-8} \text{ с.} \quad (2)$$

Следовательно, средняя длина распада частицы равна

$$\bar{s} = v\bar{T} = 300 \text{ см.}$$

б) Введем 4-векторы:

$$P_x = (\mathbf{P}_x, jE_x), \quad P_\mu = (\mathbf{P}_\mu, jE_\mu) \quad \text{и} \quad P_v = (\mathbf{P}_v, jE_v). \quad (3)$$

В соответствии с законом сохранения энергии и импульса имеем

$$P_v = P_x - P_\mu. \quad (4)$$

Возведем обе части уравнения (4) в квадрат:

$$P_v^2 = (P_x - P_\mu)^2,$$

или

$$0 = -m_x^2 - m_\mu^2 + 2E_x E_\mu - 2|\mathbf{P}_x| \cdot |\mathbf{P}_\mu| \cos 15^\circ.$$

Подставляя известные значения  $E_x$ ,  $|\mathbf{P}_\mu|$ ,  $m_\mu$  и  $m_x$ , получаем

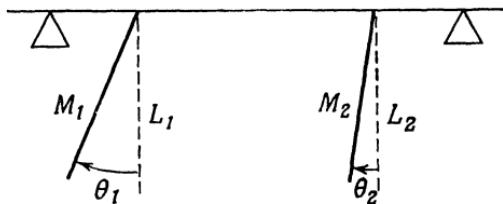
$$2000\sqrt{2} E_\mu - 2000 |\mathbf{P}_\mu| \cos 15^\circ = 1000^2 + 100^2.$$

При столь высокой энергии мю-мезона членом  $m_\mu^2$  можно пренебречь и положить  $E_\mu \approx P_\mu$ . Таким образом,

$$E_\mu \approx \frac{500}{\sqrt{2} - \cos 15^\circ} \approx 1100 \text{ МэВ.}$$

Более подробно об операциях с 4-векторами см. в задаче I.1.1.

**I.3.3.** Пусть  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы отклонения каждого из стерж-



ней от вертикали. Моменты инерции стержней равны

$$I_1 = \frac{1}{3} M_1 L_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{3} M_2 L_2^2, \quad (1)$$

а сумма кинетических энергий

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{6} M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} M_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2. \quad (2)$$

Потенциальная энергия всей системы

$$V = M_1 g \frac{L_1}{2} (1 - \cos \theta_1) + M_2 g \frac{L_2}{2} (1 - \cos \theta_2) + \frac{K}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2. \quad (3)$$

Лагранжиан системы записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - V &= \frac{1}{6} M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} M_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - \\ &- \frac{L_1}{2} M_1 g (1 - \cos \theta_1) - \frac{L_2}{2} M_2 g (1 - \cos \theta_2) - \frac{K}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{6} M_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} M_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{4} M_1 L_1 g \theta_1^2 - \frac{1}{4} M_2 L_2 g \theta_2^2 - \frac{K}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

(при этом мы произвели разложение  $\cos \theta_1$  и  $\cos \theta_2$  в степенной ряд). Из выражения (4) находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \frac{1}{3} M_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1, \\ - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= \frac{1}{2} M_1 L_1 g \theta_1 + K (\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= \frac{1}{3} M_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2, \\ - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= \frac{1}{2} M_2 L_2 g \theta_2 - K (\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (5)$$

После подстановки этих выражений в уравнение Лагранжа получаем следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} M_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} M_1 L_1 g \theta_1 + K (\theta_1 - \theta_2) &= 0, \\ \frac{1}{3} M_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} M_2 L_2 g \theta_2 - K (\theta_1 - \theta_2) &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2L_1 \ddot{\theta}_1 + 3g\theta_1 + \frac{6K}{M_1 L_1} (\theta_1 - \theta_2) &= 0, \\ 2L_2 \ddot{\theta}_2 + 3g\theta_2 - \frac{6K}{M_2 L_2} (\theta_1 - \theta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Положим  $\theta_1 = A e^{i\omega t}$  и  $\theta_2 = B e^{i\omega t}$ . Тогда уравнения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} -2L_1 \omega^2 A + 3gA + \frac{6K}{M_1 L_1} (A - B) &= 0, \\ -2L_2 \omega^2 B + 3gB - \frac{6K}{M_2 L_2} (A - B) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразуем эти уравнения к виду

$$\begin{aligned} \left( -2L_1\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_1L_1} \right) A - \frac{6K}{M_1L_1} B &= 0, \\ -\frac{6K}{M_2L_2} A + \left( -2L_2\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_2L_2} \right) B &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Чтобы уравнения (8) не противоречили одно другому, должно выполняться следующее условие:

$$\begin{vmatrix} -2L_1\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_1L_1} & -\frac{6K}{M_1L_1} \\ -\frac{6K}{M_2L_2} & -2L_2\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_2L_2} \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

откуда

$$\left( -2L_1\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_1L_1} \right) \left( -2L_2\omega^2 + 3g + \frac{6K}{M_2L_2} \right) - \frac{36K^2}{M_1M_2L_1L_2} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} 4L_1L_2\omega^4 - \left[ 6g(L_1 + L_2) + \frac{12K(M_1L_1^2 + M_2L_2^2)}{M_1M_2L_1L_2} \right] \omega^2 + \\ + \left[ 9g + \frac{18K(M_1L_1 + M_2L_2)}{M_1M_2L_1L_2} \right] g = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

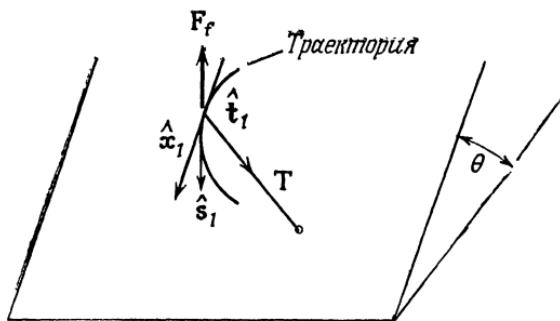
Уравнение (10) можно решить и определить частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $\omega_4$ <sup>1)</sup>. Подставляя найденные частоты  $\omega_j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) в уравнения (8), можно получить соответствующие этим частотам соотношения амплитуд  $A_j$  и  $B_j$ . Таким образом, общее решение системы (6) записывается в виде

$$\theta_1 = \sum_{j=1}^4 A_j e^{i\omega_j t} \quad \text{и} \quad \theta_2 = \sum_{j=1}^4 B_j e^{i\omega_j t}.$$

**I.3.4.** Введем три единичных вектора:  $\hat{x}_1$  — в направлении кратчайшего спуска по наклонной плоскости,  $\hat{s}_1$  — в направлении

<sup>1)</sup> Нужно не забывать, что в системе с двумя степенями свободы возможны колебания только с двумя частотами. Из уравнения (10) следуют четыре значения частоты. Два из них положительны, а два других отличаются от последних только знаком. В данной задаче им соответствуют синфазные ( $\omega_c^2$ ) и противофазные ( $\omega_n^2 > \omega_c^2$ ) колебания. — Прим. перев.

касательной к траектории частицы и  $\hat{t}_1$  — вдоль нити по направлению к отверстию (см. рисунок).



Условие квазистатического равновесия частицы, когда она едва движется, записывается в виде

$$\mathbf{T} + mg \sin \theta \hat{x}_1 + \mathbf{F}_f = 0; \quad (1)$$

здесь  $\mathbf{F}_f$  — сила трения, действующая на частицу со стороны плоскости и всегда противоположная направлению движения, а  $\mathbf{T}$  — натяжение нити. По определению  $\mathbf{F}_f = -\mu F_n \hat{s}_1$ . Подставляя сюда  $F_n = mg \cos \theta$  и  $\mu = \operatorname{tg} \theta$ , получаем

$$\mathbf{F}_f = -mg \sin \theta \hat{s}_1.$$

Теперь уравнение (1) принимает вид

$$\mathbf{T} + mg \sin \theta \hat{x}_1 = mg \sin \theta \hat{s}_1. \quad (2)$$

Возведем обе части уравнения (2) в квадрат:

$$T^2 + m^2 g^2 \sin^2 \theta + 2Tmg \sin \theta (\hat{t}_1 \cdot \hat{x}_1) = m^2 g^2 \sin^2 \theta.$$

После упрощения получаем

$$T(T + 2mg \sin \theta \cos \delta) = 0, \quad (3)$$

где  $\cos \delta = (\hat{t}_1 \cdot \hat{x}_1)$ .

Если частица находится выше отверстия, т. е. когда

$$0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leq \cos \delta \leq 1,$$

то из уравнения (3) следует, что  $T \leq 0$ . Таким образом, поскольку натяжение нити  $T$  не может быть отрицательным, принимаем  $T = 0$ .

Если же частица находится ниже отверстия, т. е. когда

$$\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \pi \quad \text{и} \quad -1 \leq \cos \delta \leq 0,$$

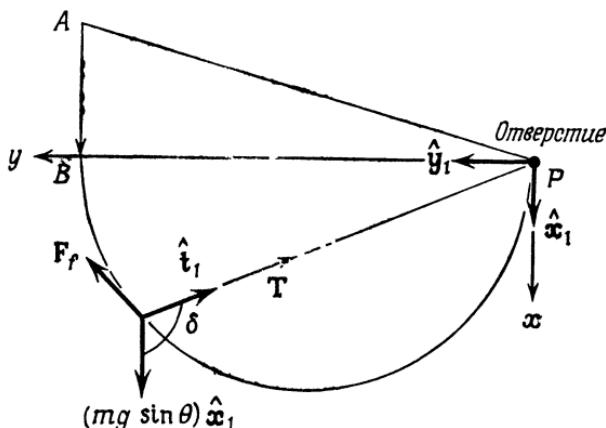
то натяжение  $T$  оказывается положительным:

$$T = -2mg \sin \theta \cos \delta > 0.$$

Траекторию частицы определяет результирующая сила

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{T} + mg \sin \theta \hat{\mathbf{x}}_1 = mg \sin \theta (\hat{\mathbf{x}}_1 - 2 \cos \delta \hat{\mathbf{t}}_1) = \\ &= mg \sin \theta [\hat{\mathbf{x}}_1 + 2 \cos \delta (\sin \delta \hat{\mathbf{y}}_1 - \cos \delta \hat{\mathbf{x}}_1)] = \\ &= mg \sin \theta [1 - 2 \cos^2 \delta] \hat{\mathbf{x}}_1 + 2 \cos \delta \sin \delta \hat{\mathbf{y}}_1 = \\ &= mg \sin \theta \cos 2\delta (-\hat{\mathbf{x}}_1 + \tan 2\delta \hat{\mathbf{y}}_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Направление  $\hat{\mathbf{y}}_1$  показано на рисунке, приведенном ниже.



Траекторию частицы можно построить следующим образом. На участке от  $A$  до  $B$  натяжение нити бесконечно мало (но положительно) и частица просто соскальзывает вниз по наклонной плоскости. Пусть  $\delta \geq \pi/2$ ; из (4) мы получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\tan 2\delta = -\frac{2 \sin \delta \cos \delta}{\cos^2 \delta - \sin^2 \delta} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad (5)$$

где

$$x = r \cos(\pi - \delta) = -r \cos \delta \quad \text{и} \quad y = r \sin(\pi - \delta) = r \sin \delta.$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$(x^2 - y^2) dy - 2xy dx = 0. \quad (6)$$

Оно имеет следующее решение:

$$\frac{x^2}{y} + y = C, \quad \text{или} \quad x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}, \quad (7)$$

где  $C$  — постоянная, определяемая из условия  $C = y = BP$  при  $x = 0$ .

Таким образом, траектория частицы между точками  $B$  и  $P$ , описываемая уравнением (7), представляет собой полуокружность радиусом  $C/2$  с центром в точке  $x=0, y=C/2$ .

**I.3.5.** Пусть  $P_y$  — вертикальная составляющая реакции опоры. Сила, действующая на опору по вертикали, равна  $-P_y$ . Когда стержень проходит горизонтальное положение, он обладает кинетической энергией  $I\dot{\theta}^2/2$ , которая соответствует разности потенциальных энергий стержня в начальном и конечном состояниях:

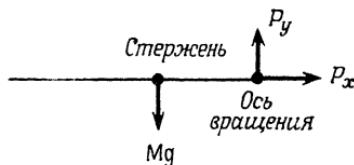
$$\frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{2} MgL \sin 30^\circ;$$

здесь  $I$  — момент инерции стержня относительно оси вращения. Для однородного стержня, закрепленного на одном конце,  $I=ML^2/3$ . Следовательно,

$$\frac{1}{6} ML^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} MgL. \quad (1)$$

Ордината центра масс стержня  $y = (L/2)\sin \theta$ , и мы имеем

$$\dot{y} = \frac{1}{2} L\dot{\theta} \cos \theta \quad \text{и} \quad \ddot{y} = \frac{1}{2} L(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta).$$



Уравнение движения центра масс стержня имеет вид

$$Mg - P_y = M\ddot{y} = \frac{1}{2} ML(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta). \quad (2)$$

При горизонтальном положении стержня  $\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$ . Вращательное движение стержня относительно центра масс описывается уравнением

$$\frac{1}{2} LP_y \cos \theta = I_{\text{п.м.}} \ddot{\theta}.$$

Подставляя сюда  $I_{\text{п.м.}} = ML^2/12$ , получаем

$$P_y \cos \theta = \frac{1}{6} ML\ddot{\theta}. \quad (3)$$

Подставляя  $\ddot{\theta}$  из выражения (3) в уравнение (2), получаем

$$Mg - P_y = 3P_y,$$

откуда

$$P_y = \frac{Mg}{4}. \quad (4)$$

Величина  $-P_y$  представляет собой составляющую силы, действующую вертикально вниз на ось вращения стержня. Реакцию опоры  $P_x$  можно найти из условия, что  $P_x$  должна быть равна центростремительной силе, действующей на стержень. В момент времени, когда стержень проходит горизонтальное положение,

$$P_x = \int_0^L \frac{M}{L} x \dot{\theta}^2 dx = \frac{1}{2} M L \dot{\theta}^2. \quad (5)$$

Подставляя сюда выражение для  $\dot{\theta}^2$  из (1), находим

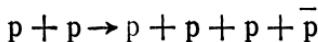
$$P_x = \frac{3}{4} Mg.$$

Сила  $-P_x$  направлена так, что она стремится сдвинуть ось вращения стержня влево.

**I.3.6.** Пороговое значение энергии движущегося протона определяется выражением

$$T_{\text{пор}} = \Delta M \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{\Delta M}{2m_2} \right). \quad (1)$$

В случае реакции



имеем

$$\Delta M = 2m_p \quad \text{и} \quad m_1 = m_2 = m_p.$$

Следовательно,

$$T_{\text{пор}} = 6m_p = 5,62 \text{ ГэВ.}$$

*Замечание.* Вывод формулы (1) см. в книге: J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, стр. 397—400<sup>1</sup>). Другой подход см. в решении задачи IV.11.7, разд. «Атомная физика и квантовая механика» настоящего сборника.

#### I.4.1.

а) Приливные волны совершают работу за счет энергии вращения Земли. Максимальная энергия, которую могут рассеять приливные волны, равна кинетической энергии вращения Земли  $I\omega^2/2$ , где  $I$  — момент инерции Земли, а  $\omega$  — угловая скорость ее вращения.

б) Рассечем мысленно Землю пополам плоскостью, перпендикулярной плоскости земной орбиты и проходящей через центры Солнца и Земли. Поскольку форма Земли несколько отличается от шарообразной, одна из ее половин окажется несколько ближе к Солнцу, чем другая. Поэтому в соответствии с законом

<sup>1</sup>) См. перевод: Дж. Джексон, Классическая электродинамика, «Мир», М., 1965, стр. 435—439. — Прим. перев.

обратных квадратов она будет притягиваться к Солнцу сильнее, чем другая половина.

Пусть  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — радиус-векторы, определяющие положения центров масс двух половин Земли относительно Солнца,  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  — силы притяжения рассматриваемых половин Земли Солнцем и  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор, определяющий положение центра масс первой половины относительно центра масс Земли. Таким образом, мы имеем<sup>1)</sup>

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0.$$

Вращающий момент, действующий на Землю со стороны Солнца, приблизительно равен нулю, и можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = 0 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_0 \times (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) + \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \equiv \\ &\equiv \mathbf{C} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь этот момент мы представили в виде суммы момента пары сил  $\mathbf{C} = \mathbf{r}_0 \times (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)$  относительно центра масс Земли и момента силы  $\mathbf{F}$ , приложенной к центру масс Земли, относительно Солнца. Момент пары  $\mathbf{C}$  уменьшает угловую скорость вращения Земли, в то время как момент  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  увеличивает орбитальный момент Земли  $\mathbf{L}_{\text{орб}}$ . С увеличением последнего возрастает радиус земной орбиты, а также период обращения Земли (в соответствии с законом Кеплера  $\omega^2 r^3 = 4\pi^2 r^3 / T^2 = \text{const}$ ). Сохранение суммарного момента импульса наглядно видно из уравнения (1): уменьшение момента, связанного с суточным вращением Земли, приводит к немедленному возрастанию орбитального момента Земли на ту же самую величину.

**I.4.2.** Среднее время жизни  $= 2 \cdot 10^{-6} / \sqrt{1 - (0,8)^2} = 3 \cdot 10^{-6}$  с.

**I.4.3.** Меньше.

**I.4.4.** Меньше.

**I.4.5.**  $\bar{x} = 1,5$  и  $\bar{y} = 1$ .

**I.4.6.** Останется прежним.

**I.4.7.** Из векторного соотношения между моментом внешней силы  $\mathbf{M}$ , угловой скоростью прецессии  $\Omega$  и собственным моментом импульса  $\mathbf{L}$  волчка

$$\mathbf{M} = \Omega \times \mathbf{L}$$

следует, что вектор  $\Omega$  направлен вверх, поэтому ось волчка прецессирует против часовой стрелки.

<sup>1)</sup> Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  определяет положение центра масс Земли относительно центра Солнца. — Прим. перев.

**I.4.8.** Приведенная масса системы равна

$$\frac{3 \cdot 1}{3+1} m = \frac{3}{4} m.$$

Следовательно, период колебаний равен

$$2\pi \sqrt{\frac{3m}{4k}} = \pi \sqrt{\frac{3m}{k}}.$$

**I.4.9.** При статическом равновесии

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad (\text{поскольку } F = -\frac{dV}{dr}).$$

Таким образом,

$$-2ar^{-3} + br^{-2} = 0,$$

откуда

$$r = \frac{2a}{b}.$$

**I.4.10.**

- а)  $\leftarrow \rightarrow$  или  $\rightarrow \leftarrow$  — колебания в противофазе (мода 1);  
 б)  $\leftarrow \leftarrow$  или  $\rightarrow \rightarrow$  — колебания в фазе (мода 2).

**I.4.11.** Поскольку  $g = GM/R^2$ , то  $\Delta g/g = -2\Delta R/R$ . Следовательно, уменьшение радиуса Земли на 1% привело бы к увеличению ускорения свободного падения  $g$  на 2%.

**I.4.12.** Пусть  $P$  — мгновенная ось вращения банки в момент времени  $t$ . Запишем уравнение вращательного движения относительно  $P$ :

$$I\ddot{\theta} = Mk^2\ddot{\theta} = MgR \sin \theta, \quad \text{или} \quad k^2\ddot{\theta} = gR \sin \theta,$$

где  $I$  — момент инерции банки относительно оси  $P$ , а  $k^2$  — квадрат радиуса инерции банки. Для пустой банки

$$k_1^2 = \frac{I_1}{M_1} = R^2 + R^2 = 2R^2,$$

а для заполненной

$$k_2^2 = \frac{I_2}{M_2} = \frac{1}{2}R^2 + R^2 = \frac{3}{2}R^2.$$

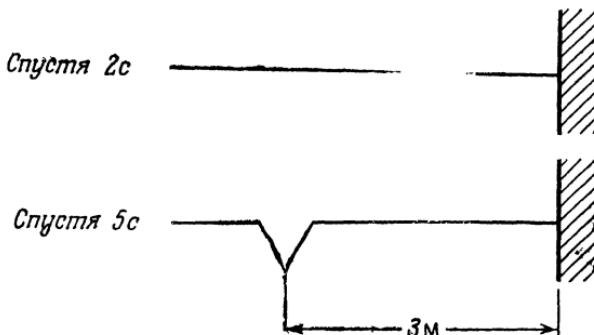
Отсюда видно, что  $k_1^2 > k_2^2$ , и, следовательно,  $\ddot{\theta}_2 > \ddot{\theta}_1$ . Заполненная банка скатится первой.

**I.4.13.**

$$\frac{\text{Скорость потока из нижн. отв.}}{\text{Скорость потока из верхн. отв.}} = \frac{\sqrt{P_l}}{\sqrt{P_u}} = \sqrt{3};$$

здесь  $P_l$  — давление воды у нижнего отверстия, а  $P_u$  — у верхнего отверстия.

### I. 4.14.



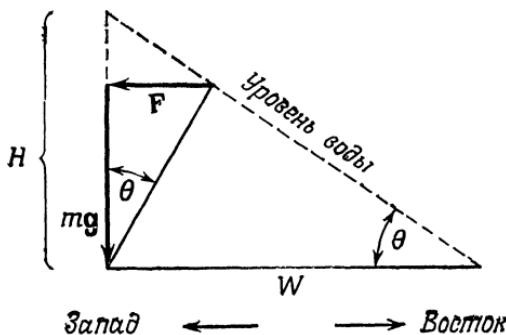
### I. 4.15. Кориолисова сила

$$\mathbf{F} = -2m\omega \times \mathbf{v}.$$

а) Она действует на частицу массой  $m$ , за которой наблюдают в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  относительно инерциальной системы;  $\mathbf{v}$  — скорость этой частицы во вращающейся системе координат.

б) Кориолисова сила направлена на запад. Поэтому уровень воды на западном берегу выше, чем на восточном.

в)



Поскольку  $|\omega \times \mathbf{v}| = \omega v \sin \lambda$ , то

$$\tan \theta = \frac{2\omega v \sin \lambda}{g}. \quad (1)$$

Разность уровней

$$H = W \tan \theta = \frac{2W\omega v \sin \lambda}{g}; \quad (2)$$

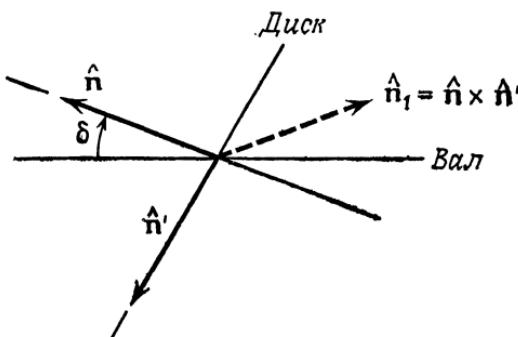
здесь  $v$  — скорость течения воды,  $\lambda$  — географическая широта,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $W$  — ширина реки,  $g$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

г)  $v = 8 \text{ км/ч} \approx 2,2 \cdot 10^2 \text{ см/с}$ ;  $\lambda = 30^\circ$ ,  $\sin \lambda = 0,5$ ;  $\omega = 2\pi/T = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$  ( $T = 86\,400 \text{ с}$ );  $W \approx 4 \text{ км} = 4 \cdot 10^5 \text{ см}$ ;  $g \approx 10^3 \text{ см/с}^2$ .

Подставляя эти значения в формулу (2), получаем

$$H = 2W\omega v \frac{\sin \lambda}{g} = 2(4 \cdot 10^5)(7,3 \cdot 10^{-5})(2,2 \cdot 10^2)0,5 \cdot 10^{-3} \approx 6,4 \text{ см.}$$

### I. 4.16.



Как показано на рисунке, единичный вектор  $\hat{n}$  направлен вдоль оси диска, вектор  $\hat{n}'$  перпендикулярен вектору  $\hat{n}$  и лежит в плоскости рисунка, а вектор  $\hat{n}_1$  перпендикулярен плоскости рисунка. Угловую скорость  $\omega$  можно разложить на две составляющие по направлениям  $\hat{n}$  и  $\hat{n}'$ :

$$\omega = \hat{n}\omega \cos \delta + \hat{n}'\omega \sin \delta. \quad (1)$$

Момент импульса диска записывается в виде

$$\mathbf{M} = \hat{n}C\omega \cos \delta + \hat{n}'A\omega \sin \delta. \quad (2)$$

Уравнение движения диска в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , имеет вид

$$\text{Вращающий момент} = \left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right)_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \frac{d\mathbf{M}}{dt}, \quad (3)$$

где производная  $(d/dt)_0$  относится к лабораторной системе, а  $d/dt$  — к вращающейся системе координат. Поскольку во вращающейся вместе с диском системе координат диск неподвижен, то второй член в правой части уравнения (3) равен нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Вращающий момент} &= \hat{n}_1(A\omega^2 \sin \delta \cos \delta - C\omega^2 \sin \delta \cos \delta) = \\ &= \hat{n}_1(A - C)\omega^2 \sin \delta \cos \delta, \end{aligned}$$

где  $\hat{n}_1 = \hat{n} \times \hat{n}'$ .

## I. 5.1.

а) Пусть  $x$  — расстояние, на которое брускок смещается относительно положения равновесия. Из уравнения движения

$$M\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0 \quad (1)$$

определяем частоту колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}. \quad (2)$$

б) Новая система, масса которой равна  $M + m$ , имеет частоту колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M + m}}. \quad (3)$$

в) Пусть  $v_i$  — скорость бруска, с которой он проходит положение равновесия. В соответствии с законом сохранения энергии имеем

$$\frac{1}{2}Mv_i^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)A^2, \quad (4)$$

где  $A$  — амплитуда колебаний. Запишем закон сохранения импульса

$$Mv_i = (M + m)v_f, \quad (5)$$

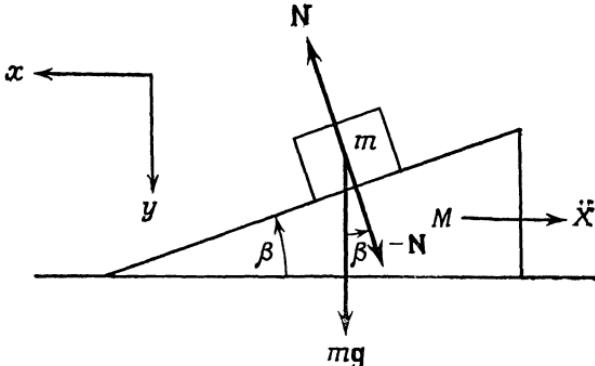
где  $v_f$  — скорость бруска с прилипшим к нему грузом  $m$ . Выразим переход кинетической энергии в потенциальную в виде

$$\frac{1}{2}(M + m)v_f^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)B^2. \quad (6)$$

Исключая из уравнений (4) — (6)  $v_i$  и  $v_f$ , находим соотношение между новой амплитудой колебаний  $B$  и амплитудой  $A$ :

$$B = \sqrt{\frac{M}{M + m}}A.$$

## I. 5.2.



Пусть  $N$  — нормальная сила реакции, действующая на массу  $m$  со стороны клина. Уравнение движения бруска массой  $m$

в направлении  $y$  записывается в виде

$$m\ddot{y} = mg - N \cos \beta, \quad (1)$$

а в направлении  $x$

$$m\ddot{x} = N \sin \beta. \quad (2)$$

Уравнение движения клина массой  $M$  в направлении  $x$  имеет вид

$$M\ddot{X} = -N \sin \beta. \quad (3)$$

Поскольку брусков движется по клину, мы можем написать следующее уравнение связи:

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{x} - \ddot{X}} = \operatorname{tg} \beta. \quad (4)$$

Из уравнений (2) и (3) имеем

$$\ddot{x} = -\frac{M}{m} \ddot{X}. \quad (5)$$

Подставляя  $N$  из уравнения (2) в (1) и учитывая (5), получаем

$$m\ddot{y} = mg + M\ddot{X} \operatorname{ctg} \beta. \quad (6)$$

Подставляя  $\ddot{x}$  из (5) в (4), находим

$$\ddot{X} = -\ddot{y} \frac{\operatorname{ctg} \beta}{1 + M/m}. \quad (7)$$

Наконец, исключая  $\ddot{y}$  в (7) с помощью (6), получаем ускорение клина относительно стола

$$\ddot{X} = -\frac{mg \operatorname{ctg} \beta}{M + m + M \operatorname{ctg}^2 \beta}.$$

**I.5.3.** Натяжение нити меньше, чем в случае, когда брусков массой 5 кг приклеен к столу.

**I.5.4.** Кориолисова сила  $-2m\omega \times v$  действует в направлении линейной скорости, с которой вращается диск. Следовательно, лезвие падает по направлению вращения диска.

**I.5.5.** Поскольку должен выполняться закон сохранения момента импульса, мы имеем

$$J = I\dot{\theta} = \text{const.} \quad (1)$$

Так как момент инерции  $I$  пропорционален  $R^2$ , уравнение (1) принимает вид

$$R^2\dot{\theta} = \text{const},$$

или

$$2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = 0.$$

Следовательно, сокращение радиуса Земли на 1% приведет к увеличению  $\theta$  на 2%. Поскольку энергия вращения Земли пропорциональна  $\theta$ :

$$T_{\text{вр}} = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{J\dot{\theta}}{2},$$

то она также увеличится на 2%.

**I.5.6.** Обозначим через  $\theta$  угол отклонения стержня от вертикали. Уравнение движения стержня записывается следующим образом:

$$I\ddot{\theta} = -(Mg \sin \theta) \frac{L}{2} - kL \sin \theta.$$

При малых углах отклонения  $\theta$  ( $\sin \theta \approx \theta$ ) оно принимает вид

$$I\ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2} MgL + kL\right)\theta = 0.$$

После подстановки выражения для момента инерции стержня  $I=ML^2/3$  имеем

$$\frac{ML}{3}\ddot{\theta} + \left(\frac{Mg}{2} + k\right)\theta = 0.$$

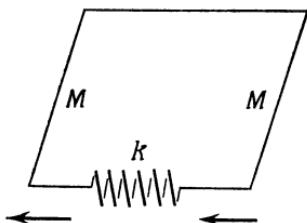
Отсюда получаем частоту колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{Mg + 2k}{ML}}$$

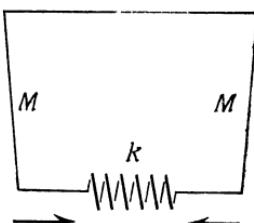
и период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{ML}{Mg + 2k}}.$$

**I.5.7.**



а) Синфазные колебания



б) Противофазные колебания

В случае малых отклонений уравнения движения стержней записываются в виде

$$\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + Mg\theta \frac{L}{2} = 0,$$

$$\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + Mg\theta \frac{L}{2} + 2kL^2\theta = 0.$$

Соответствующие частоты колебаний равны

$$\text{а) } \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \quad \text{и} \quad \text{б) } \omega = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{Mg + 4kL}{ML}}.$$

**I. 5.8.** Отношение масс Солнца и Земли равно  $3 \cdot 10^5$ .

**I. 5.9. в)** Оба одновременно.

**I. 5.10. б)** Пружина сожмется. Деформация пружины описывается выражением

$$d \sim (\rho_{\text{вода}} - \rho_{\text{пробка}}) \cdot \text{Объем} \cdot g_{\text{эфф.}}$$

Когда лифт спускается с ускорением, то  $g_{\text{эфф.}}$  становится меньше и пружина сокращается.

**I. 5.11.** Квадрат периода обращения спутника пропорционален кубу радиуса его орбиты. Следовательно, период обращения второго спутника на 1,5% больше первого.

**I. 5.12.**

а) В начальный момент времени  $t=0$  имеем  $v=0$ ; поэтому <sup>1)</sup>  $a_R/a_{2R}=1$ .

б) В случае двух шариков с одинаковыми массами установившаяся скорость обратно пропорциональна силе сопротивления среды. Следовательно,

$$\frac{v_R}{v_{2R}} = \frac{2R}{R} = 2.$$

**I. 5.13. а)** Обе силы удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

Следовательно, для них можно ввести потенциалы

$$V_1 = -2xyz + 6x^2y^2z^2 + \text{const}$$

и

$$V_2 = -(xy^2 + yx^2 + xx^2 + zx^2 + yz^2 + zy^2 + 2xyz) + \text{const.}$$

б) Полная энергия сохраняется в поле обеих сил.

**I. 5.14.** Запишем уравнение движения шара в направлении  $x$ :

$$m\ddot{x} = \mu mg, \quad \text{или} \quad \ddot{x} = \mu g. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Автор пренебрегает подъемной силой (силой Архимеда), которая в отличие от силы тяжести не одинакова для обоих шариков. С учетом этой силы отношения  $a_R/a_{2R}$  и  $v_R/v_{2R}$  должны быть больше 1 и 2 соответственно. — Прим. перев.

Вращение шара вокруг его оси описывается уравнением

$$I\ddot{\theta} = -\mu gr, \quad (2)$$

где  $I=2mr^2/5$  — момент инерции шара.

Интегрируя уравнения (1) и (2), получаем

$$\dot{x} = \mu gt, \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{5\mu g}{2r} t + \omega. \quad (4)$$

Пусть, начиная с момента  $t=t_1$ , шар катится без скольжения:

$$r\dot{\theta} = \dot{x}. \quad (5)$$

Подставляя это условие в уравнения (3) и (4), получаем

$$r\left(\omega - \frac{5}{2r}\mu gt_1\right) = \mu gt_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{2\omega r}{7\mu g}. \quad (6)$$

а) Конечную скорость движения центра масс шара находим из уравнения (3), подставляя в него выражение (6) для  $t_1$ :

$$\dot{x}_{\text{ц.м.}} = \mu gt_1 = \frac{2}{7}\omega r. \quad (7)$$

б) Прежде чем установится эта скорость, шар пройдет расстояние

$$S = \frac{1}{2}\mu gt_1^2 = \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{2\omega r}{7\mu g}\right)^2 = \frac{2\omega^2 r^2}{49\mu g}.$$

в) При движении без скольжения момент внешних сил равен нулю, поэтому должен выполняться закон сохранения момента импульса

$$I_0\omega = I\omega_f, \quad (8)$$

где  $I_0 = 2mr^2/5$ , а  $I$  — момент инерции шара относительно мгновенной оси:  $I = I_0 + mr^2 = 7mr^2/5$ . Таким образом,

$$\omega_f = \frac{2\omega}{7},$$

и конечная скорость движения центра масс шара равна

$$v_f = \omega_f r = \frac{2\omega r}{7},$$

что совпадает с полученной ранее скоростью [см. выражение (7)].

**I. 5.15.**

а) Момент импульса равен

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= I_1\omega_1\hat{\mathbf{i}} + I_2\omega_2\hat{\mathbf{j}} + I_3\omega_3\hat{\mathbf{k}} = \\ &= I_1\omega \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + I_3\omega \cos \theta \hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ ,  $I_1 > I_3$ ,  $\hat{\mathbf{k}}$  — направляющий вектор вдоль оси симметрии эллипсоида.

б) Частота прецессии определяется по формуле

$$\omega_p = \frac{\omega (I_1 - I_3) \cos \theta}{I_1}, \quad (2)$$

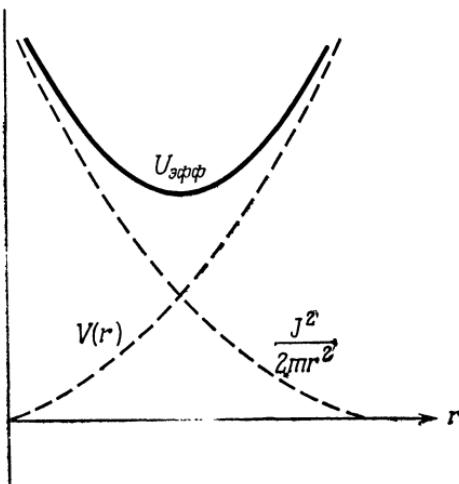
которая непосредственно следует из динамических уравнений Эйлера.

**I. 5.16.**

а) Эффективный потенциал определяют следующим образом:

$$U_{\text{эфф}} = \frac{J_0^2}{2mr^2} + V(r).$$

На рисунке показана зависимость эффективного потенциала от  $r$  для конкретного случая, когда  $V(r) = kr^2/2$ .



б) Круговое движение имеет место при равенстве полной энергии  $E$  минимальному значению  $U_{\text{эфф}}$ . Радиус орбиты  $R$  можно найти из уравнения

$$\frac{dU_{\text{эфф}}}{dr} \Big|_{r=R} = 0.$$

в) Если  $V(r) = kr^2/2$ , то

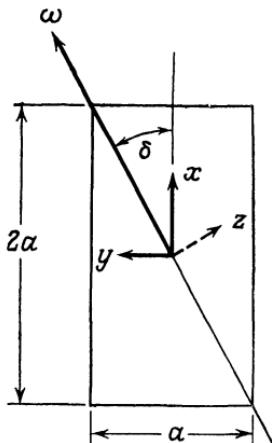
$$U_{\text{эфф}} = \frac{J_0^2}{2mr^2} + \frac{kr^2}{2}.$$

Условие минимума  $U_{\text{эфф}}$  записывается в виде

$$-\frac{dU_{\text{эфф}}}{dr} = m \frac{v^2}{R} - kR = 0,$$

откуда находим  $(v/R)^2 = k/m$ . Следовательно, угловая скорость кругового движения равна  $\sqrt{k/m}$ .

### I. 6.1.



а) Моменты инерции относительно главных центральных осей  $I_x$  и  $I_y$  вычисляются непосредственно:

$$I_x = \frac{1}{3} m \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ma^2, \quad (1)$$

$$I_y = \frac{1}{3} m \left(\frac{2a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ma^2. \quad (2)$$

Момент инерции  $I_z$  для тонкой пластины равен сумме  $I_x$  и  $I_y$ :

$$I_z = I_x + I_y = \frac{5}{12} ma^2. \quad (3)$$

б) Пусть  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  и  $\hat{k}$  — единичные векторы вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Вектор момента импульса  $\mathbf{L}$  (а также вектор угловой скорости  $\omega$ ) не совпадает ни с одной из главных осей, но располагается в плоскости  $x$ ,  $y$ . Его величина и направление даются выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \hat{i} I_x \omega_x + \hat{j} I_y \omega_y = \hat{i} I_x \omega \cos \delta + \hat{j} I_y \omega \sin \delta = \\ &= \hat{i} \frac{1}{12} ma^2 \cos \delta + \hat{j} \frac{1}{3} ma^2 \omega \sin \delta. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $I_x$  и  $I_y$  заменены выражениями (1) и (2) соответственно. Отметим, что в этой формуле  $\delta$  — угол между векторами  $\omega$  и  $\hat{i}$ .

б) На ось вращения действует момент

$$\mathbf{N} = \left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_0, \quad (5)$$

где  $(d\mathbf{L}/dt)_0$  — производная по времени вектора  $\mathbf{L}$  в инерциальной системе отсчета. В общем случае

$$\left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_0 = \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \omega \times \mathbf{L}. \quad (6)$$

Во вращающейся с телом системе отсчета первый член в правой части уравнения (6) обращается в нуль. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \omega \times \mathbf{L} &= \left( \frac{1}{3} ma^2 \omega^2 \sin \delta \cos \delta - \frac{1}{12} ma^2 \omega^2 \sin \delta \cos \delta \right) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= \frac{1}{4} ma^2 \omega^2 \sin \delta \cos \delta \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

**1.6.2.** Космический корабль движется по круговой орбите радиусом  $r_0$ . При этом центробежная сила инерции должна уравновешивать силу притяжения, действующую по закону обратных квадратов:

$$mr_0 \dot{\theta}^2 = \frac{k}{r_0^2}. \quad (1)$$

Следовательно, момент импульса корабля

$$J_0 = m \dot{\theta} r_0^2 = \sqrt{mkr_0}. \quad (2)$$

Возрастание линейной скорости корабля на 8% вызывает увеличение момента импульса также на 8%. Таким образом,  $J = 1,08J_0$ . Дифференциальное уравнение движения корабля имеет вид

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{km}{J^2}, \quad (3)$$

где  $u = 1/r$ .

Это уравнение имеет следующее решение:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{km/J^2 + A \cos \theta}, \quad (4)$$

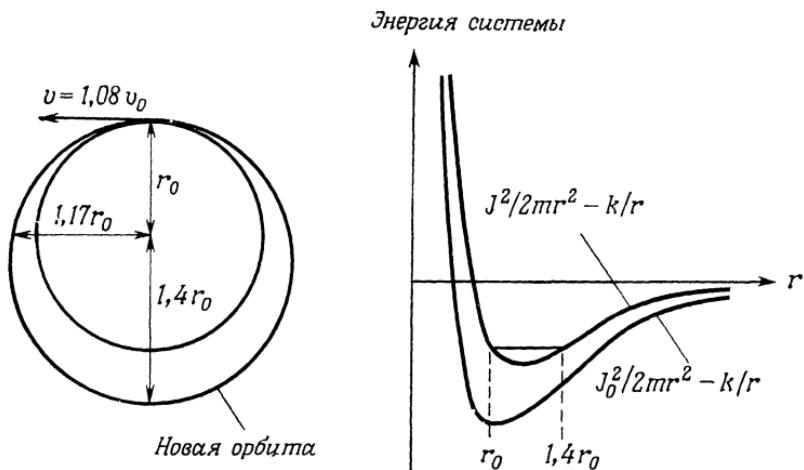
где  $A$  — постоянная. Используя начальное условие  $r = r_0 = J_0^2/km$  при  $\theta = 0$ , можно определить  $A$ :

$$A = \frac{1}{r_0} - \frac{km}{J^2} = \frac{1}{r_0} \left[ 1 - \left( \frac{J_0}{J} \right)^2 \right] \approx 0,14 \frac{1}{r_0}. \quad (5)$$

Следовательно,

$$r = \frac{r_0}{0,86 + 0,14 \cos \theta}. \quad (6)$$

Отсюда находим, что расстояние до апогея равно  $1,40r_0$ .



*Другое решение.* Пусть  $\bar{V}$  и  $R$  — скорость корабля и расстояние до него в апогее. В соответствии с законом сохранения момента импульса и энергии имеем

$$mv_0 r_0 = m\bar{V} R, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r_0} = \frac{1}{2}m\bar{V}^2 - \frac{k}{R}. \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) находим

$$R = \frac{v^2}{2k/mr_0 - v^2} r_0. \quad (9)$$

Подставляя сюда выражение для  $k/r_0$  из равенства (1), т. е.

$$\frac{k}{r_0} = mv_0^2, \quad (10)$$

получаем  $R \approx 1,4r_0$ .

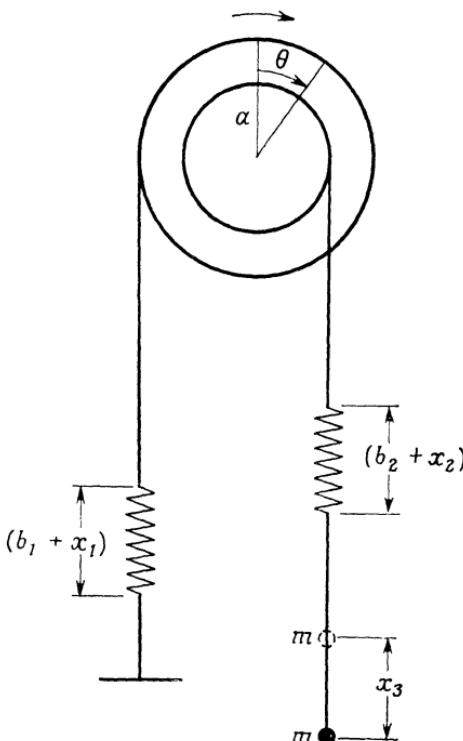
**I. 6.3.** Пусть  $b_1$  и  $b_2$  — первоначальные длины пружин 1 и 2, когда вся система находится в равновесии, и диск не вращается. При повороте диска на угол  $\theta$  от положения равновесия пружина 1 растягивается на длину  $x_1 = a\theta$ . Если при этом растягивается и пружина 2 на длину  $x_2$ , то груз опускается на длину  $x_3 = a\theta/2 + x_2$ . Кинетическая энергия системы  $T$  равна сумме кинетической энергии диска  $T_d$  и кинетической энергии груза  $T_{gp}$ :

$$T_d = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{ma^2\dot{\theta}^2}{4}, \quad (1)$$

$$T_{gp} = \frac{m\dot{x}_3^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \frac{a\dot{\theta}}{2} + \dot{x}_2 \right)^2. \quad (2)$$

Потенциальная энергия системы

$$V = \frac{1}{2} k a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 - mgx_3 = \\ = \frac{1}{2} k a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 - mg \left( \frac{1}{2} a\theta + x_2 \right). \quad (3)$$



Составляем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{4} ma^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{1}{4} a^2 \dot{\theta}^2 + a\dot{\theta} \dot{x}_2 + \dot{x}_2^2 \right) - \\ - \frac{k}{2} (a^2 \theta^2 + x_2^2) + mg \left( \frac{1}{2} a\theta + x_2 \right). \quad (4)$$

Уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0. \quad (5)$$

Подставляя выражение для лагранжиана (4) в эти уравнения, мы непосредственно получаем два уравнения движения.

**I. 6.4.** Обозначим через  $x$  смещение груза от положения равновесия в момент времени  $t$ . При этом пружина растягивается

на длину  $x = x_0 e^{i\omega t}$ . Уравнение движения груза записывается в виде

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kx_0 e^{i\omega t}.$$

Оно имеет частное (стационарное) решение

$$x = \frac{kx_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta),$$

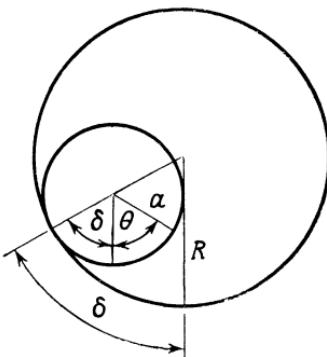
где

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b\omega}{k - m\omega^2}.$$

Амплитуда стационарного движения, установившегося по прошествии достаточно длительного времени, равна

$$\frac{kx_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}.$$

### I. 6.5.



а) Кинетическую энергию цилиндра можно представить в виде суммы энергии поступательного движения центра масс цилиндра и энергии вращения его относительно центра масс. Обозначим через  $\dot{\theta}$  угловую скорость вращения цилиндра. Кинетическую энергию цилиндра можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(R - a)^2 \dot{\delta}^2, \quad (1)$$

где для сплошного цилиндра  $I_0 = ma^2/2$ . При движении без скольжения  $a\dot{\theta} = (R - a)\dot{\delta}$ . Следовательно, выражение (1) принимает вид

$$T = \frac{m}{4} (R - a)^2 \dot{\delta}^2 + \frac{m}{2} (R - a)^2 \dot{\delta}^2 = \frac{3}{4} m (R - a)^2 \dot{\delta}^2. \quad (2)$$

Потенциальная энергия цилиндра равна

$$V = -(R - a)mg \cos \delta \quad (V = 0 \text{ при } \delta = 90^\circ). \quad (3)$$

Составляем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4} m(R - a)^2 \dot{\delta}^2 + mg(R - a) \cos \delta. \quad (4)$$

б) Подставляя выражение (4) в уравнение Лагранжа, получаем уравнение движения

$$\frac{3}{2}(R - a)\ddot{\delta} + g \sin \delta = 0. \quad (5)$$

в) В случае малых колебаний  $\sin \delta \approx \delta$ , и уравнение (5) записывается в виде

$$\ddot{\delta} + \frac{2g}{3(R - a)}\delta = 0,$$

откуда получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R - a)}}.$$

### I. 6.6.

а) Чтобы определить значения  $x$ , при которых заданный ряд сходится, можно использовать следующий признак сходимости: если для любого бесконечного ряда модуль отношения  $n$ -го члена ряда к  $(n - 1)$ -му члену имеет предел  $A < 1$ , то такой ряд сходится. Мы имеем

$$R = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n! x^n (n-1)^{n-1}}{n^n (n-1)! x^{n-1}} = \frac{nx (n-1)^{n-1}}{n^n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} x = \\ = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} x \rightarrow \frac{x}{e} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Следовательно, при  $|x| < e$  ряд сходится абсолютно. В случае  $x = -e$  знаки членов ряда чередуются, члены ряда монотонно убывают по величине и  $n$ -й член в пределе стремится к нулю. Поэтому при  $x = -e$  ряд сходится<sup>1)</sup>. В случае  $x = e$  применим асимптотическую формулу Стирлинга

$$\frac{n!}{n^n} = \sqrt{2\pi n} e^{-n} \left[ 1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

Таким образом, из выражения (1) имеем

$$R = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

и ряд при  $x = e$ , согласно признаку Раабе, расходится.

<sup>1)</sup> Согласно теореме Лейбница о сходимости знакопеременного ряда. — Прим. перев.

б) Преобразуем заданный нам интеграл следующим образом:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{(x+c)^2 + a^2} dx = \operatorname{Re} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{(x+c)^2 + a^2} dx \right] = \\ = \operatorname{Re} \left[ \oint \frac{e^{imz}}{(z+c)^2 + a^2} dz \right] \quad (z = x + iy).$$

Здесь интегрирование выполняется в верхней полуплоскости, если  $m > 0$ , и соответственно в нижней полуплоскости, если  $m < 0$ . Следовательно, при  $m > 0$

$$I = \operatorname{Re} \{2\pi i \operatorname{Выч}[f(z); -c + ia]\} =$$

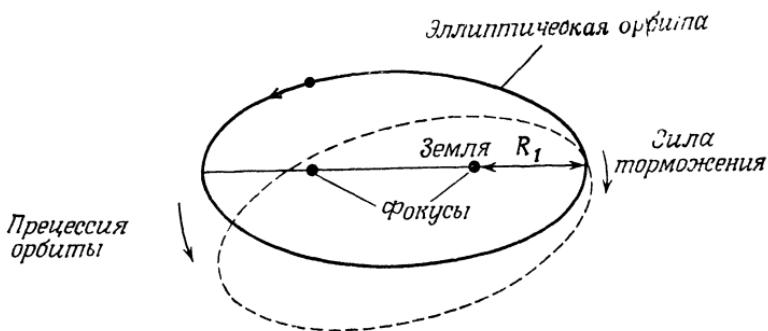
$$= \operatorname{Re} \left[ 2\pi i \frac{e^{im(-c+ia)}}{-2ia} \right] = \frac{\pi}{a} e^{-am} \cos mc.$$

При  $m < 0$  имеем

$$I = \operatorname{Re} \{2\pi i \operatorname{Выч}[f(z); -c - ia]\} =$$

$$= \operatorname{Re} \left[ 2\pi i \frac{e^{im(-c-ia)}}{-2ia} \right] = -\frac{\pi}{a} e^{-a|m|} \cos mc.$$

### I. 6.7.



Как известно из первого закона Кеплера, Земля должна находиться в одном из фокусов эллиптической орбиты.

Тормозящее действие атмосферы проявляется при движении спутника только вблизи Земли. Пусть в результате этого торможения спутник теряет за один оборот импульс  $\Delta P$ . При этом момент импульса спутника уменьшается на

$$\Delta J = -\Delta PR_1, \quad (1)$$

где  $R_1$  — показанное на рисунке расстояние от центра Земли до перигея орбиты. Эксцентриситет орбиты  $e$  связан с моментом импульса  $J$  соотношением

$$e = \left(1 + \frac{2EJ^2}{mk^2}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{EJ^2}{mk^2}, \quad (2)$$

где  $E$  — полная энергия системы,  $k$  — постоянная в выражении для потенциальной энергии  $V = -mk/r$ . В случае эллиптической орбиты полная энергия  $E$  отрицательна и  $0 < e < 1$ . Дифференцируя соотношение (2), затем находим

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{J^2 \Delta E + 2EJ \Delta J}{emk^2}; \quad (3)$$

здесь  $\Delta E$  — энергия, теряемая спутником за один оборот. Используя соотношения

$$\frac{J^2}{mR_1^2} = 2 [E - V(R_1)] \quad \text{и} \quad \Delta E = \frac{P}{m} \Delta P = \frac{J \Delta J}{mR_1^2},$$

получаем

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{2 [2E - V(R_1)] J \Delta J}{emk^2}. \quad (4)$$

В случае эллиптической орбиты

$$2E - V(R_1) = mk \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{a} \right) > 0. \quad (5)$$

Поскольку знак  $\Delta J$  отрицателен, из (4) и (5) следует

$$\frac{\Delta e}{e} < 0.$$

Из этой формулы мы видим, что эксцентриситет орбиты уменьшается. С каждым оборотом спутник становится ближе к Земле. Его орбита все больше и больше приближается к круговой.

Большая полуось орбиты  $a$  пропорциональна  $1/W$ , где  $W$  — энергия связи:  $W = -E$ . Поскольку спутник теряет энергию, то  $W$  возрастает. Следовательно,  $a$  уменьшается. Уменьшается также и период его обращения  $T$ , так как в соответствии с третьим законом Кеплера квадрат периода пропорционален кубу большой полуоси.

Спутник теряет свою энергию на торможение лишь при сближении с Землей. Поэтому подавляющую часть периода обращения он движется вне атмосферы, а остальную, меньшую, часть — в ней. С каждым оборотом полярный угол, соответствующий наибольшему сближению с Землей, увеличивается. При этом орбита спутника прецессирует в направлении, показанном на рисунке. Кратчайшее расстояние между спутником и Землей  $R_1$  можно найти, пользуясь законами сохранения момента импульса и энергии:

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{k}{2E} - \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + \frac{J^2}{2mE}} = -\frac{k}{2E} + \frac{k}{2E} \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{mk^2}} \approx \\ &\approx -\frac{k}{2E} + \frac{k}{2E} \left( 1 + \frac{EJ^2}{mk^2} \right) = \frac{J^2}{2mk}; \end{aligned}$$

здесь, поскольку  $E < 0$ , знак корня во втором выражении изменен на противоположный. Следовательно, по мере уменьшения  $J$  расстояние  $R_1$  сокращается.

**I. 6.8.** Обе трубы горизонтальны; следовательно, каких-либо изменений потенциальной энергии жидкости нет. В сечении  $C$  кинетическая энергия единичного объема жидкости равна  $\rho v_C^2/2$ , а в сечении  $B$   $\rho v_B^2/2$ . Дано, что  $v_B = 20$  см/с. Скорость  $v_C$  можно найти из закона сохранения массы

$$v_C = v_B \frac{\text{Площадь сечения } B}{\text{Площадь сечения } C} = 120 \text{ см/с.}$$

Разность давлений в сечениях  $B$  и  $C$  находим из закона сохранения энергии для 1 см<sup>3</sup> воды:

$$P_B - P_C = \frac{1}{2} \rho v_C^2 - \frac{1}{2} \rho v_B^2 = 7000 \text{ г/(см} \cdot \text{с}^2\text{)}^1;$$

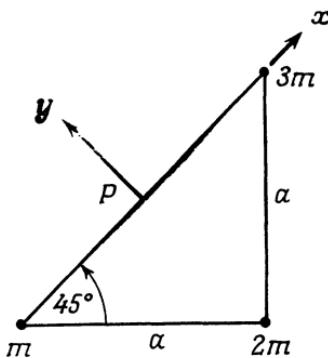
она должна быть равна разности давлений в трубках манометра, подсоединенных к  $B$  и  $C$ , которая определяется по высоте водяного столба ( $\rho = 1$ ) между уровнями <sup>2)</sup>:

$$gh = P_B - P_C.$$

Следовательно,

$$h \approx 7 \text{ см.}$$

**I. 6.9.** Поскольку рассматриваемые материальные точки рас-



положены в одной плоскости, то ось, перпендикулярная этой плоскости в точке  $P$ , является одной из главных осей инерции.

<sup>1)</sup> Это частный вид уравнения Бернуlli для стационарного движения несжимаемой жидкости. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Расчет справедлив для манометра, в котором плотность жидкости вдвое превышает плотность воды. В случае ртутного манометра следует применить формулу  $(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{воды}})gh = P_B - P_C$ ; тогда  $\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{воды}} = 12,5$  и  $h \approx 5,5$  мм. — Прим. перев.

Назовем ее осью  $z$ . Тогда момент инерции относительно этой оси записывается в виде

$$I_z = 3m \frac{a^2}{2} + 2m \frac{a^2}{2} + m \frac{a^2}{2} = 3ma^2. \quad (1)$$

Очевидно, второй главной осью инерции должна быть гипотенуза треугольника, так как вне ее расположена только одна материальная точка. Следовательно,

$$I_x = 2m \frac{a^2}{2} = ma^2. \quad (2)$$

Используя соотношение  $I_x + I_y = I_z$ , находим

$$I_y = 2ma^2.$$

### 1.6.10.

а) Плотность гелия составляет примерно  $1/7$  плотности воздуха. Поскольку шар находится в воздухе, простой путь решения задачи состоит в следующем: считать плотность шара равной  $-6/7 \rho_{\text{возд}}$  и не обращать в дальнейшем внимания на присутствие воздуха. Действующее ускорение «свободного падения» шара равно в этом случае  $-6/7 g$ , а центробежное ускорение  $-6a/7$ , причем

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{100^2 \cdot 10^5}{3 \cdot 3600^2} = 25,7 \text{ см}/\text{с}^2.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-(-6/7) a}{-(-6/7) g} = \frac{a}{g} = \frac{v^2}{gR} = \frac{25,7}{981} = 0,0262,$$

или

$$\theta = \operatorname{arctg} 0,0262 \approx 1^\circ 30'.$$

б) К центру кривизны пути.

**1.6.11.** Пусть  $T$  — натяжение веревки. В состоянии равновесия  $2T = W = 70$  кг. Отсюда  $T = 35$  кг.

**1.7.1.** Разложение функции  $f(t)$  в ряд Фурье записывается в виде

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega t. \quad (1)$$

а) Прежде всего отметим, что в нашем случае  $f(t)$  — четная функция времени  $t$ ; следовательно, все  $B_n$  должны обращаться в нуль. Кроме того, заданный сигнал является периодическим (с периодом  $T_1$ ). Таким образом, мы имеем следующее условие:

$$f(t + T_1) \equiv f(t). \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$\omega = \omega_1 \equiv \frac{2\pi}{T_1}, \quad (3)$$

и разложение (1) принимает вид

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2\pi n t}{T_1} + \frac{A_0}{2}. \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что сумма большого числа фурье-компонент с приблизительно одинаковыми амплитудами обращается в нуль, за исключением тех промежутков времени, где многие из этих компонент оказываются в фазе. В соответствии с заданной волновой картиной фурье-компоненты должны находиться в фазе лишь в течение тех промежутков времени, когда делятся хлопки, т. е. в промежутках

$$m_1 T_1 \leq t \leq m_1 T_1 + \Delta t, \quad m_1 = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

должно выполняться условие

$$\cos n \omega_1 t \approx 1.$$

Оно справедливо при

$$n \omega_1 \Delta t \ll 1 \quad \text{или} \quad n \ll \frac{1}{\omega_1 \Delta t}.$$

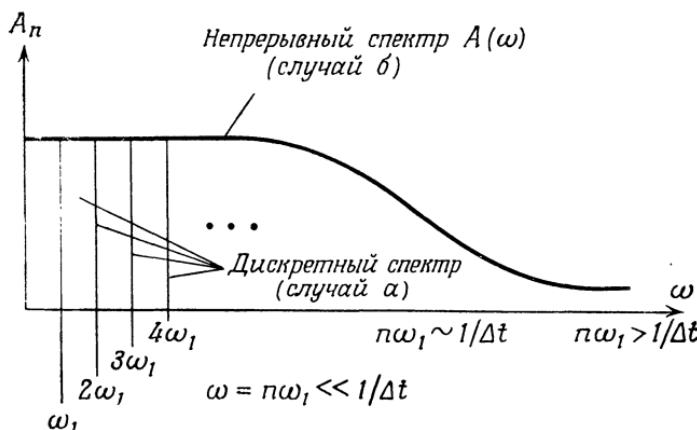
Таким образом, приходим к заключению, что

$$A_n \approx \text{const} \quad \text{при} \quad n \ll \frac{1}{\omega_1 \Delta t}.$$

Чтобы остальные компоненты не вызывали существенного искажения исходной волновой картины, они должны быть достаточно малыми:

$$A_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n > \frac{1}{\omega_1 \Delta t}.$$

В результате получаем следующее распределение:



б) Пусть  $T_2$  — временной интервал, внутри которого можно услышать звук одиночного хлопка. Этот интервал может быть сколь угодно большим, но обязательно конечным. Если допустить, что в случае „а“ интервал  $T_1$  между двумя последовательными хлопками превышает  $T_2$ , то к решению данной задачи можно применить результат, полученный выше. Однако в том случае, когда  $T_2$  произвольно велико, частота  $\omega_1$ , определяемая формулой (3), становится весьма малой. Отсюда следует, что спектр одиночного хлопка является непрерывным.

К такому же выводу можно прийти, выполняя преобразование Фурье, т. е. записывая функцию  $f(t)$  в виде

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} A(\omega) d\omega,$$

причем

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^{-i\omega t} dt.$$

Таким образом, мы и здесь получаем непрерывный спектр  $A(\omega)$ . Его поведение отражено выше на рисунке.

### I.7.2.

а)  $S$  — унитарная матрица, следовательно,

$$S^+ S = 1. \quad (1)$$

Подставляя сюда заданное в условии задачи соотношение

$$S = 1 - 2iT,$$

получаем

$$(1 + 2iT^+) (1 - 2iT) = 1$$

или

$$1 - 2i(T - T^+) + 4T^+T = 1. \quad (2)$$

При  $|T_{ij}| \ll 1$  членом  $T^+T$  можно пренебречь. Тогда выражение (2) принимает вид

$$T - T^+ = 0 \quad \text{или} \quad T = T^+,$$

т. е.  $T$  — эрмитова матрица.

б) Из выражения (2) имеем

$$i(T - T^+) = 2T^+T. \quad (3)$$

Для упругих переходов ( $a \rightarrow a$ ) равенство (3) можно переписать в виде

$$i(\langle a | T | a \rangle - \langle a | T^+ | a \rangle) = \sum_n 2 \langle a | T^+ | n \rangle \langle n | T | a \rangle,$$

где

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1,$$

поскольку  $|n\rangle$  — полный набор промежуточных состояний.

Так как  $T_{aa}^+ = T_{aa}^*$ , то приведенное выше равенство принимает вид

$$i [\langle a | T | a \rangle - (\langle a | T | a \rangle)^*] = \sum_n 2 \langle a | T^+ | n \rangle \langle n | T | a \rangle.$$

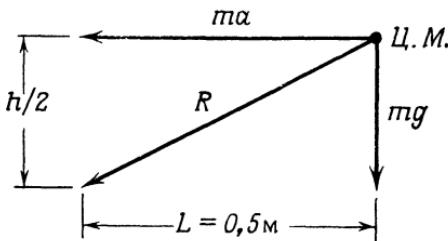
Используя соотношение

$$T_{ij} - T_{ij}^* = 2i \operatorname{Im} T_{ij},$$

получаем окончательно

$$\operatorname{Im} (\langle a | T | a \rangle) = - \sum_n (\langle n | T | a \rangle)^2.$$

### I. 7.3.



Предельная высота кладки  $h$  соответствует случаю, когда результирующая сила  $R$  направлена в сторону нижнего ребра ящика: при большей высоте кладки ящик опрокидывается. Для моментов сил имеем

$$mgL = ma \frac{h}{2}, \quad \text{т. е. } 9,8 \cdot 0,5 = 6 \frac{h}{2},$$

откуда  $h = 1,6$  м.

### I. 7.4.

а) В состоянии покоя вертикальная составляющая сил должна быть равна нулю:

$$mg + kx = 0.$$

Нам дано  $x = -6$  см. Следовательно,

$$k = \frac{mg}{6}. \quad (1)$$

При возникновении собственных колебаний их период равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{6}{g}} \approx 0,5 \text{ с.}$$

б) Если пол вибрирует по закону  $Ae^{i\omega_0 t}$ , то уравнение движения записывается в виде

$$m\ddot{x} + kx = Ake^{i\omega_0 t}; \quad (2)$$

здесь мы приняли, что состоянию равновесия соответствует значение координаты  $x = 0$ . Перепишем уравнение (2), подставляя вместо  $k$  его выражение (1):

$$\ddot{x} + \frac{1}{6}gx = \frac{1}{6}Age^{i\omega_0 t}. \quad (3)$$

Это уравнение имеет стационарное решение

$$x = \frac{A}{1 - 6\omega_0^2/g} e^{i\omega_0 t}.$$

Следовательно, искомое отношение амплитуд при  $\omega_0 = 40\pi$  рад/с равно

$$\frac{1}{|1 - 6\omega_0^2/g|} \approx 0,01.$$

### I. 7.5.

а) При подъеме якоря возникает кориолисова сила

$$\mathbf{F} = -2m\omega \times \mathbf{v},$$

действующая на судно и вызывающая его движение.

б) Судно станет относить на запад.

в) Пусть  $v$  — скорость, с которой поднимают якорь на мачту. Тогда судно приобретает ускорение

$$a = \frac{2m\omega v}{m + M},$$

где  $m$  — масса якоря,  $M$  — масса судна. Высота мачты  $S$  и время  $T$  поднятия якоря связаны со скоростью  $v$  соотношением

$$S = \int_0^T v dt.$$

Конечная скорость судна равна

$$\begin{aligned} V &= \int_0^T a dt = \frac{2m\omega}{m + M} \int_0^T v dt = \frac{2m\omega}{m + M} S = \\ &= \frac{2 \cdot 200 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \cdot 20}{1200} = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Здесь  $7,29 \cdot 10^{-5}$  рад/с — угловая скорость вращения Земли ( $\omega = 2\pi/T_3 = 6,283/86\,400$  рад/с  $= 7,29 \cdot 10^{-5}$  рад/с).

*Другое решение.*

в) Воспользуемся свойством сохранения момента импульса судна и якоря относительно центра масс Земли в инерциальной системе:

$$(M+m)\omega r^2 = [Mr^2 + m(r+S)^2]\omega'.$$

Отсюда

$$\omega' \approx \omega - \frac{2m\omega S}{(M+m)r},$$

и для скорости судна относительно воды получаем

$$\bar{V} = (\omega' - \omega)r = -\frac{2m\omega}{M+m}S \quad (\text{направлена на запад}).$$

г) Судно фактически теряет кинетическую энергию за счет работы, совершающейся против центростремительной силы.

### I. 7.6.

а) Пусть  $R_0$  — длина пружины в свободном состоянии. Условие равновесия системы записывается в виде

$$k\left(\frac{L}{2} - R_0\right) = m_1g.$$

Следовательно,

$$R_0 = \frac{L}{2} - \frac{m_1g}{k}. \quad (1)$$

При растяжении пружины до длины  $R$  она запасает потенциальную энергию

$$\frac{k}{2}(R - R_0)^2 = \frac{k}{2}\left(R - \frac{L}{2} + \frac{m_1g}{k}\right)^2.$$

Потенциальная энергия стержня и кольца в поле силы тяжести

$$V = -m_1gR \cos \theta - \frac{1}{2}m_2gL \cos \theta.$$

При  $\theta = 90^\circ$  эта потенциальная энергия принимается равной нулю.

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий вращательного и поступательного движения стержня и кольца:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{R}_1^2 + R^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{6}m_2L^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2).$$

Лагранжиан системы записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - V = & \frac{1}{6}m_2L^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2) + \left(m_1gR + m_2g\frac{L}{2}\right) \cos \theta - \\ & - \frac{k}{2}\left(R - \frac{L}{2} + \frac{m_1g}{k}\right)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

б) Подставляя выражение (2) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = 0,$$

получаем уравнения движения

$$\left( m_1 R^2 + \frac{1}{3} m_2 L^2 \right) \ddot{\theta} + \left( m_1 R + m_2 \frac{L}{2} \right) g \sin \theta = 0, \quad (3)$$

$$m_1 \ddot{R} + (k - m_1 \dot{\theta}^2) R + m_1 g (1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} k L = 0. \quad (4)$$

в) В случае малых колебаний  $\theta \ll 1$  и  $R - L/2 \ll L/2$ . Поэтому в уравнении (3) можно положить  $\sin \theta \approx \theta$ , а в (4)  $\cos \theta = 1$  и  $\dot{\theta} = 0$ . Таким образом, уравнения (3) и (4) принимают вид

$$\left( m_1 R^2 + \frac{1}{3} m_2 L^2 \right) \ddot{\theta} + \left( m_1 R_1 + \frac{1}{2} m_2 L \right) g \theta = 0, \quad (5)$$

$$m_1 \ddot{R} + k \left( R - \frac{L}{2} \right) = 0. \quad (6)$$

Из последнего уравнения сразу находим частоту одной из нормальных мод:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}.$$

**I.8.1.** Действительную и аналитическую функцию можно разложить в степенной ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Отсюда следует, что при  $x \rightarrow \infty$  все члены этого ряда, за исключением первого, неограниченно возрастают. Таким образом, если  $f(x)$  — аналитическая функция при  $x \rightarrow \infty$ , то все коэффициенты  $a_n$  при возрастающих членах должны быть равны нулю. Поэтому

$$f(x) = a_0 = \text{const.}$$

**I.8.2.** Матрица преобразования при повороте системы координат записывается в виде

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}_{0=90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $\mathbf{V}'$  и  $T'$  вектор  $\mathbf{V}$  и тензор  $T$  соответственно в новой системе координат. Тогда

$$\mathbf{V}' = R\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix},$$

$$T' = R^+ T R = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

**I.8.3.** Если радиус-вектор  $\mathbf{r}$  отличен от нуля, то левую часть дифференциального уравнения  $\nabla^2 f - \alpha^2 f = -4\pi\delta(\mathbf{r})$  можно записать в сферических координатах  $r, \theta$  и  $\varphi$ . Мы имеем

$$\nabla^2 f - \alpha^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + Lf - \alpha^2 f,$$

где  $L$  — оператор, зависящий от  $\partial/\partial\theta$  и  $\partial/\partial\varphi$ . Поскольку  $f = e^{-ar}/r$ , то  $Lf \equiv 0$ . Следовательно, при  $r \neq 0$

$$\nabla^2 f - \alpha^2 f = \frac{1}{r} (-\alpha)^2 e^{-ar} - \alpha^2 \frac{e^{-ar}}{r} = 0. \quad (1)$$

Пусть теперь  $r \rightarrow 0$ ; вычислим интеграл

$$I = \int (\nabla^2 f - \alpha^2 f) dV$$

по объему, ограниченному сферой радиусом  $a$  с центром в точке  $r = 0$ . В результате прямых вычислений и применения формулы для дивергенции имеем

$$I = \int (\nabla f \cdot d\mathbf{S}) - \alpha^2 \int f dV = 4\pi - aae^{-aa} - \alpha^2 \int_0^a e^{-ar} 4\pi r^2 dr.$$

В предельном случае, когда  $a \rightarrow 0$ ,

$$I = -4\pi. \quad (2)$$

Учитывая совместно (1) и (2), получаем

$$\nabla^2 f - \alpha^2 f = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

(Более подробное решение см. в задаче II.2.1, разд. «Электричество и магнетизм».)

**I.8.4.** Координаты  $x$  и  $y$  материальной точки зависят от  $L$ ,  $h(t)$  и  $\theta$ :

$$x = L \sin \theta, \quad (1)$$

$$y = h(t) + L \cos \theta = h_0 \cos \omega t + L \cos \theta.$$

Дифференцируя выражения (1) по  $t$ , получаем

$$\dot{x} = \dot{\theta} L \cos \theta, \quad (2)$$

$$\dot{y} = -(\omega h_0 \sin \omega t + \dot{\theta} L \sin \theta).$$

Кинетическая энергия материальной точки записывается в виде  
 $T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) =$

$$= \frac{m}{2} (\dot{\theta}^2 L^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 L^2 \sin^2 \theta + \omega^2 h_0^2 \sin^2 \omega t + 2\omega h_0 \dot{\theta} L \sin \theta \sin \omega t) = \\ = \frac{m}{2} (\dot{\theta}^2 L^2 + \omega^2 h_0^2 \sin^2 \omega t + 2\omega h_0 \dot{\theta} L \sin \theta \sin \omega t). \quad (3)$$

Потенциальная энергия

$$V = mgy = mg (h_0 \cos \omega t + L \cos \theta). \quad (4)$$

Составляем лагранжиан системы:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} [\dot{\theta}^2 L^2 + \omega^2 h_0^2 \sin^2 \omega t + 2\omega h_0 \dot{\theta} L \sin \theta \sin \omega t - \\ - 2g (h_0 \cos \omega t + L \cos \theta)]. \quad (5)$$

Подставляя его в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

находим уравнение движения

$$L^2 \ddot{\theta} + \omega^2 h_0 L \sin \theta \cos \omega t + \omega h_0 L \dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t - \\ - \omega h_0 L \dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t - g L \sin \theta = 0,$$

или

$$L \ddot{\theta} + \omega^2 h_0 \sin \theta \cos \omega t - g \sin \theta = 0.$$

Рассмотрим случай малых колебаний. Переидем к переменной  $\theta' = \theta - \pi$ ; тогда можно написать

$$\sin \theta = -\sin \theta' \approx -\theta',$$

и последнее уравнение движения принимает вид

$$L \ddot{\theta}' + (g - \omega^2 h_0 \cos \omega t) \theta' = 0.$$

Если шарнир закреплен неподвижно, т. е.  $h_0 = 0$ , то полученное уравнение совпадает с уравнением движения математического маятника.

### I. 8.5.

а) Нет, часы будут показывать разное время благодаря действию следующих эффектов:

- 1) ускорения Кориолиса  $-2\omega \times \mathbf{v}$ ,
- 2) ослабления гравитационного притяжения с ростом высоты.
- 3) центростремительного ускорения  $-v^2 \hat{\mathbf{r}}_1/r$ ,

- 4) сил трения между воздухом и маятником,  
 5) релятивистского эффекта  $t = \tau / \sqrt{1 - (v/c)^2}$ ,  
 6) ускорения при взлете и посадке,  
 7) ускорения, связанного с орбитальным движением Земли, и т. д.

б) В качестве системы отсчета выберем инерциальную систему с началом координат в центре Земли. В этой системе кориолисова сила отсутствует. Действующее ускорение свободного падения  $g_{\text{эфф}}$  для объекта, движущегося вблизи земной поверхности с угловой скоростью  $\omega$ , дается выражением

$$g_{\text{эфф}} = -\frac{GM}{R^2} \hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \left( -\frac{GM}{R^2} + \omega^2 R \right) \hat{\mathbf{R}} \equiv -g \hat{\mathbf{R}},$$

т. е.

$$g_{\text{эфф}} \equiv g = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R = g_0 - \omega^2 R,$$

где  $g_0 = GM/R^2$ .

Период колебаний математического маятника равен, как известно,  $T = 2\pi \sqrt{L/g}$ , где  $L$  — длина маятника, которую мы считаем неизменной. Угловая скорость самолета З, летящего на запад, в инерциальной системе равна нулю. Поэтому период колебаний маятника в нем

$$\begin{aligned} T_Z &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g + \omega^2 R}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 R/g}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R/g}}; \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $T_0 = 2\pi \sqrt{L/g}$  — период колебаний часов, оставленных в аэропорту. Угловая скорость самолета В, летящего на восток, вдвое превышает угловую скорость вращения Земли. Следовательно,

$$\begin{aligned} T_B &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0 - 4\omega^2 R}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g - 3\omega^2 R}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{\frac{1}{1 - 3\omega^2 R/g}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - 3\omega^2 R/g}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что  $\omega^2 R \ll g$ , периоды колебаний обоих маятниковых часов в летящих самолетах можно приближенно представить следующими выражениями:

$$T_B = T_0 + \frac{1}{2} T_0 \frac{\omega^2 R}{g_0 - \omega^2 R} = T_0 + \frac{3\Delta T}{2}$$

и

$$T_Z = T_0 - \frac{1}{2} T_0 \frac{\omega^2 R}{g_0 - \omega^2 R} = T_0 - \frac{\Delta T}{2}.$$

Подставляя сюда  $g = g_0 - \omega^2 R = 9,8 \text{ м/с}^2$ ,  $R = 6 \cdot 10^6 \text{ м}$  и  $T_0 = 24 \text{ ч}$  и учитывая, что  $\omega = 2\pi/T_0$ , получаем

$$\Delta T = \frac{4\pi^2 \cdot 6 \cdot 10^6}{9,8 \cdot 24 \cdot 3600} = 280 \text{ с.}$$

Поскольку  $T_B > T_0$ , часы В идут медленнее часов А, а поскольку  $T_3 < T_0$ , часы З идут быстрее. По прибытии самолетов в аэропорт часы В отстанут на 420 с, а часы З уйдут вперед на 140 с относительно часов А, оставленных в аэропорту.

### I. 8.6.

а) Поскольку Солнце представляет собой однородный шар, то сила равна

$$f = -G \frac{mM}{r^2}. \quad (1)$$

б) Согласно общей теории относительности, гравитационный потенциал записывается в виде

$$-\Phi = \frac{GM}{r} + \frac{A}{r^2}, \quad (2)$$

где  $A$  может зависеть только от  $c$ ,  $G$  и  $M$ .

Пусть  $D(A)$  — размерность параметра  $A$ . Из (2) приходим к следующему соотношению:

$$D(A) = D(GMr). \quad (3)$$

Используя соотношение

$$D\left(\frac{GmM}{r}\right) = D(mc^2) \equiv D(\text{энергия}),$$

получаем

$$D(r) = D\left(\frac{GM}{c^2}\right). \quad (4)$$

Из (3) и (4) имеем

$$D(A) = D\left(\frac{G^2 M^2}{c^2}\right).$$

Следовательно,

$$A \sim \frac{G^2 M^2}{c^2}.$$

в) Отношение второго члена к первому в формуле (2) равно

$$\frac{GM}{rc^2} = \frac{1,3 \cdot 10^{26}}{1,5 \cdot 10^{13} \cdot 9 \cdot 10^{20}} \approx 10^{-8}.$$

Для Земли эта величина очень мала. Только для Меркурия эта поправка является ощутимой.