

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

II. 1.1.

а) Толщина скин-слоя определяется выражением

$$\delta = c / \sqrt{2\mu\omega},$$

т. е. она обратно пропорциональна квадратному корню из частоты. Следовательно, мы имеем

$$\delta_1/\delta_2 = \sqrt{\omega_2/\omega_1} = \sqrt{10^8/10^3} \approx 300.$$

б) Плотность энергии лазерного луча связана с пиковым значением электрического поля E соотношением

$$\text{Плотность энергии} = E^2/8\pi.$$

Отсюда находим $E = \sqrt{8\pi \cdot 10^{13}} = 1,6 \cdot 10^7$ ед. СГСЭ = $4,8 \cdot 10^{11}$ В/м.

в) Уравнение колебательного контура записывается в виде

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0. \quad (1)$$

Дифференцируя его по времени t , получаем следующее уравнение:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (1a)$$

Ищем решение в виде

$$I = A_0 e^{-i\delta t}.$$

После подстановки его в уравнение получаем

$$L\delta^2 + R\delta i - \frac{1}{C} = 0.$$

Решения последнего уравнения записываются в виде

$$\delta = \frac{-iR \pm \sqrt{-R^2 + 4L/C}}{2L}.$$

Критическому затуханию соответствует условие

$$R^2 - 4L/C = 0.$$

II. 1.2. Пусть

$$x = A \sin \omega t.$$

Тогда энергия колебаний электрона массой m равна

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2, \quad (1)$$

откуда находим

$$A = \sqrt{2E/m\omega^2}. \quad (2)$$

Мощность излучения дается выражением

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3c^3} e^2 a^2, \quad (3)$$

где $a = -A\omega^2 \sin \omega t$. Подставляя сюда выражение (2) для A и усредняя по периоду, получаем

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{1}{2} \omega^4 \frac{2E}{m\omega^2} = -\frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{mc^3} E. \quad (4)$$

Следовательно, энергия электрона зависит от времени t следующим образом:

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{2e^2\omega^2}{3mc^3} t\right). \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \Delta E &\approx \Delta t \left\langle \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \right\rangle = \frac{2\pi}{\omega} \frac{A^2}{3c^3} e^2 \omega^4 = \\ &= \frac{2\pi A^2 e^2 \omega^3}{3c^3} = \frac{10^{-16} \cdot 2\pi (4,8)^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{45}}{3 \cdot 27 \cdot 10^{30}} = \\ &= 1,8 \cdot 10^{-21} \text{ эрг} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ эВ.} \end{aligned}$$

б) Средняя механическая энергия электрона равна сумме средней кинетической и средней потенциальной энергий. Находим

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2;$$

здесь $v = \omega A$ — максимальная скорость электрона. Отношение излучаемой за период энергии к средней механической энергии составляет

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{A^2}{3c^3} e^2 \omega^4 \frac{2}{m A^2 \omega^2} = \frac{4\pi e^2 \omega}{3mc^3} = \frac{4\pi (4,8)^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{15}}{3 \cdot 27 \cdot 10^{30} \cdot 9,1 \cdot 10^{-28}} = 3,9 \cdot 10^{-8}.$$

в) Искомое время τ можно найти из выражения (5), полагая в нем $E = E_0/2$:

$$\tau = \frac{3mc^3}{2e^2\omega^2} \ln 2 = \frac{0,69 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 10^{30} \cdot 9,1 \cdot 10^{-28}}{2(4,8)^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{30}} \approx 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

II. 1.3.

а) Потенциал точечного заряда как функция расстояния r записывается в виде

$$V = q/r. \quad (1)$$

Дифференцируя это выражение по $-x$, получаем потенциал диполя, ориентированного в направлении оси x :

$$V_d = -\frac{dV}{dx} \Delta x = \frac{xq \Delta x}{r^3} = \frac{P \cos \theta}{r^2},$$

где $P = q \Delta x$ — дипольный момент. Электрическое поле диполя имеет вид¹⁾

$$\mathbf{E}_d = \frac{P \sin \theta}{r^3} \hat{\theta}_1 + \frac{2P \cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}}_1,$$

где $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\mathbf{r}}_1$ — единичные векторы. Принимая теперь $\theta = 90^\circ$ и $r = d$, находим потенциальную энергию взаимодействия двух параллельных диполей

$$W = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_d = P^2/d^3.$$

б) Дипольный момент проводящей сферы, помещенной в однородное электрическое поле E , равен $R^3 E$, где R — радиус сферы. Сила взаимодействия двух сфер $F = -dW/dr$, или

$$F = (ER^3)^2 \frac{3}{d^4} = \frac{3E^2 R^6}{d^4} \text{ (отталкивающая).}$$

II. 1.4.

а) Согласно закону Ампера, мы имеем

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} I;$$

здесь I — полный ток, проходящий через ограниченную замкнутым контуром поверхность. Подставляя $I = \rho v \pi r^2$ и учитывая независимость магнитного поля B от углов, получаем

$$2\pi r B = \frac{4\pi}{c} \rho v \pi r^2,$$

откуда

$$B = \frac{2\pi}{c} \rho v r.$$

б) Пусть $\delta = 2\pi \rho v/c$. Сила, действующая на протон, движущийся со скоростью V' на расстоянии $r = y_0$ от оси цилиндра, равна

$$F = m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{e V' B}{c} = -\frac{e \delta V'}{c} y_0.$$

Отсюда находим

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{e \delta V'}{mc} y_0.$$

¹⁾ Автор использует систему единиц СГСЭ и записывает поле в сферической системе координат r , θ и ϕ с центром в середине диполя и полярной осью, направленной параллельно дипольному моменту. При этом $E = 0$. — Прим. ред.

После интегрирования получаем

$$v_y = -\frac{e \delta V'}{mc} y_0 t. \quad (1)$$

Следовательно,

$$\Delta y = -\frac{e \delta V'}{2mc} y_0 t^2 = -\frac{e \delta V'}{2mc} y_0 \left(\frac{L}{V'}\right)^2 = -\frac{e \delta L^2}{2mcV'} y_0.$$

В случае $L \ll f$ величина Δy очень мала по сравнению с y_0 , и направление движения протона при выходе его из цилиндра определяется соотношением

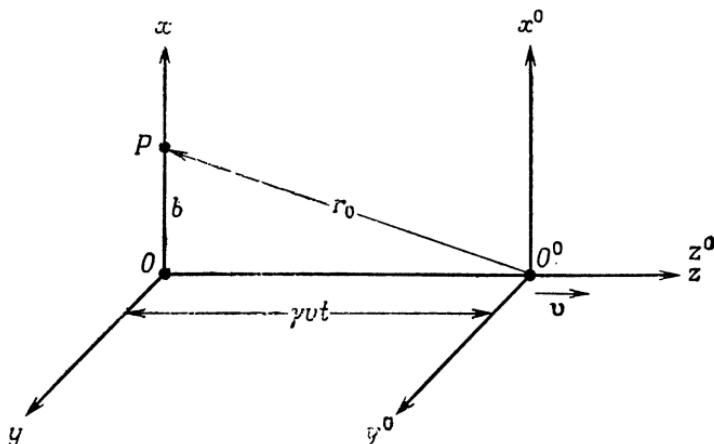
$$\frac{v_y}{V'} = \frac{y_0}{f}. \quad (2)$$

Подставляя сюда выражение (1) для v_y , находим

$$f = y_0 \frac{mcV'}{e \delta y_0 V' t} = \frac{mc}{e \delta t} = \frac{mc^2 V'}{2\pi \rho e v L} = \frac{mc^2}{2\pi \rho v L} \frac{V'}{v};$$

здесь для получения окончательного результата мы использовали следующие подстановки: $t = L/V'$ и $\delta = 2\rho v/c$.

II. 1.5.



Обозначим через $Oxyz$ лабораторную систему отсчета, а через $O^0x^0y^0z^0$ — систему отсчета, связанную с движущимся зарядом (который поместим в начало отсчета O^0). Потенциалы точечного заряда в системе $O^0x^0y^0z^0$ определяются выражениями¹⁾

$$A_x^0 = A_y^0 = A_z^0 = 0 \quad \text{и} \quad V^0 = \frac{e}{r_0},$$

¹⁾ Предложенное автором решение заменено более общим и одновременно более компактным. На рисунке, воспроизведенном без изменений, показано положение точки P с координатами $(b, 0, 0)$, в которой ранее отыскивались поля. Чтобы определить поля в этой конкретной точке, достаточно в общем решении положить $x = b$, $y = 0$ и $z = 0$. — Прим. ред.

где

$$r_0 = \sqrt{(x^0)^2 + (y^0)^2 + (z^0)^2}.$$

Преобразования Лоренца от системы отсчета $O^0x^0y^0z^0$, связанной с зарядом, к лабораторной системе $Oxyz$ описываются с помощью матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

в предположении, что система $O^0x^0y^0z^0$ движется относительно системы $Oxyz$ вдоль оси z со скоростью v . Здесь $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ а $\beta = v/c$. Применяя эту матрицу преобразования к компонентам потенциала

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ iV \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ iV^0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$A_x = 0, \quad A_y = 0, \quad A_z = \gamma\beta V^0 = \gamma\beta e/r_0 \quad \text{и} \quad V = \gamma V^0 = \gamma e/r_0.$$

Преобразования Лоренца для координат записываются в виде

$$x^0 = x, \quad y^0 = y, \quad z^0 = \gamma(z - vt) \quad \text{и} \quad t^0 = \gamma\left(t - \frac{vz}{c^2}\right).$$

Используя теперь выражения:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

находим компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , создаваемых в точке $P(x, y, z)$ равномерно движущимся зарядом:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma e}{r_0}\right) = -\gamma e \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2}} = \\ = \frac{\gamma ex}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2]^{1/2}},$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\gamma ey}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2]^{1/2}},$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\gamma e(z - vt)}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2]^{1/2}},$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\gamma\beta ey}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2]^{1/2}},$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\gamma\beta ex}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2]^{1/2}},$$

$$B_z = 0.$$

II. 2.1. Пусть

$$f(r) = \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}|}.$$

Проинтегрируем эту функцию по объему:

$$I = \int f(r) dV = \int \nabla^2 \frac{1}{r} dV = \iint_S \nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{s} \text{ (теорема Гаусса);}$$

здесь S — поверхность, ограничивающая объем V . В сферических координатах интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} I &= - \iint_S \frac{1}{r^2} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = - \iint_S \sin \theta d\varphi d\theta = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если точка } r=0 \text{ не принадлежит области } V, \\ -4\pi, & \text{если точка } r=0 \text{ принадлежит области } V. \end{cases} \end{aligned}$$

Мы видим, что функция $f(r)$ является обобщенной функцией $-4\pi\delta(\mathbf{r})$. Следовательно,

$$f(r) = \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

II. 2.2. Один заряд создает электростатическое поле

$$E_0 = \frac{q}{r^2}.$$

Диполь на большом расстоянии создает поле

$$E_1 = - \frac{dE_0}{dx} \Delta x,$$

где Δx — расстояние между двумя зарядами. Чтобы найти поле E_2 двух противоположно ориентированных диполей (квадруполя), разделенных расстоянием Δy , нужно просто продифференцировать поле одного диполя E_1 по $-y$:

$$E_2 = \frac{d^2 E_0}{dy dx} \Delta x \Delta y.$$

Аналогично определяем поле E_3 восьми зарядов (октуполя), расположенных в вершинах куба:

$$E_3 = - \frac{d^3 E_0}{dz dy dx} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Поскольку $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \text{const}$, отсюда следует, что поле E_3 обратно пропорционально r^5 .

II. 2.3. В случае дипольного излучения векторы электрического и магнитного полей в волновой зоне можно найти по формулам

$$\mathbf{E} = k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r}$$

и

$$\mathbf{B} = k^2 \mathbf{n} \times \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r};$$

здесь $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, \mathbf{p} — дипольный момент, а \mathbf{n} — единичный вектор в направлении переноса излучения, которое в нашем случае совпадает с направлением радиус-вектора к точке наблюдения. (Поля пропорциональны $1/r$, поскольку их интенсивности изменяются по закону обратных квадратов. Направление переноса излучения определяется векторным произведением $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \parallel \mathbf{n}$. В написанных выше выражениях для дипольного излучения один множитель k следует из разложения векторного потенциала, а другой — непосредственно из уравнения $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = ik \times \mathbf{A}$.) Электрическое поле, создаваемое двумя диполями вместе, записывается в виде

$$\mathbf{E}' = -\frac{\lambda}{2} \frac{d\mathbf{E}}{dx} \approx -\frac{i\lambda k^3}{2} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{xe^{ikr}}{r^2},$$

а индукция магнитного поля

$$\mathbf{B}' = -\frac{\lambda}{2} \frac{d\mathbf{B}}{dx} \approx -\frac{i\lambda k^3}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{p} \frac{xe^{ikr}}{r^2};$$

при получении этих формул мы пренебрегли всеми членами, пропорциональными $1/r^3$. Искомый вектор Пойнтинга \mathbf{S} на больших расстояниях от излучателей будет¹⁾

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'^*) \approx \frac{\pi c k^4 p^2}{4r^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \mathbf{n};$$

здесь $\cos \theta = z/r$ и $\operatorname{tg} \varphi = y/x$.

II.2.4. Петля из сверхпроводника обладает чрезвычайно малым сопротивлением. Поэтому в случае каких-либо изменений магнитного потока Φ , пронизывающего петлю, индуцированная в ней э. д. с. должна незамедлительно вызывать большие изменения тока, чтобы сохранить этот поток Φ неизменным. До совмещения обеих петель каждую из них пронизывал поток

$$\Phi_{\text{нач}} = AB = CI, \quad (1)$$

где A — площадь петли, C — постоянная. Залишем выражение для магнитного потока, пронизывающего обе петли после их совмещения:

$$\Phi_{\text{конеч}} = CI' = C(I'_1 + I'_2); \quad (2)$$

Здесь I' — суммарный ток в совмещенных петлях. Из условия $\Phi_{\text{нач}} = \Phi_{\text{конеч}}$ имеем

$$I' = I, \quad \text{или} \quad I'_1 = I'_2 = I/2, \quad (3)$$

¹⁾ Обычно в дипольном приближении вычисляют не суммы напряженностей полей диполей, а поле суммарного дипольного момента. — Прим. ред.

поскольку обе петли одинаковы. Энергию системы в исходном состоянии можно записать в виде

$$W_{\text{нач}} = \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} LI^2 = LI^2. \quad (4)$$

Энергию системы в конечном состоянии — в виде

$$W_{\text{конеч}} = \frac{1}{2} LI_1'^2 + \frac{1}{2} LI_2'^2 + MI_1'I_2'. \quad (5)$$

Учитывая (3) и то, что для совмещенных петель $M \equiv L$, получаем

$$W_{\text{конеч}} = \frac{1}{2} LI^2.$$

Энергия системы уменьшилась на

$$W_{\text{нач}} - W_{\text{конеч}} = \frac{1}{2} LI^2.$$

Это уменьшение связано с преобразованием энергии поля в механическую энергию (т. е. работу против сил, например, трения или удерживающей петлю руки) и энергию излучения.

II. 2.5. Полный импеданс электрической цепи равен¹⁾

$$\begin{aligned} Z &= i\omega L + \frac{1}{1/R + i\omega C} = i\omega L + \frac{R - iR^2\omega C}{1 + (\omega RC)^2} = \\ &= \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} + i \frac{\omega L + (\omega RC)^2 \omega L - \omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда $\omega = 1/\sqrt{LC}$, получаем

$$Z = \frac{RL}{L + R^2C} + i \frac{L^2}{(L + R^2C)\sqrt{LC}}.$$

¹⁾ Автор получает очень громоздкие формулы, не позволяющие раскрыть весьма интересную особенность данной электрической цепи, на которую, по-видимому, обратил внимание Штейнмец. Дадим более простое решение этой задачи. Для произвольной частоты ω

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{V}{R} \frac{Z_{RC}}{Z} = \frac{V}{R} \frac{\frac{R}{1 + i\omega RC}}{i\omega L + \frac{R}{1 + i\omega RC}} = \frac{V}{i\omega L + R(1 - \omega^2 LC)}.$$

В частном случае (см. условие задачи), когда $\omega^2 = 1/LC$, получаем

$$I_R = V/i\omega L = -iV/\sqrt{LC}$$

— ток через резистор не зависит от его сопротивления. Иными словами, рассматриваемая цепь представляет собой простейший стабилизатор переменного тока. Физика процесса очевидна: если $R = 0$, то ток ограничен индуктивным сопротивлением. При $0 < R < \infty$ ток поддерживается на том же уровне вследствие резонанса напряжений на элементах C и L ; эти напряжения распределяются пропорционально R . — Прим. перев.

Общий ток, протекающий в цепи, равен

$$I_{\text{общ}} = \frac{V_0}{Z} e^{i\omega t}.$$

Через резистор протекает ток

$$I_R = \frac{1}{1 + i\omega RC} I_{\text{общ}} = \\ = V_0 e^{i\omega t} \frac{1}{\frac{RL}{L + R^2 C} + i \frac{L^2}{(L + R^2 C) \sqrt{LC}}} \cdot \frac{1}{1 + i\omega RC} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{R_1 R_2} e^{-i(\delta_1 + \delta_2)},$$

где

$$R_1 = \left(\frac{RL}{L + R^2 C} \right)^2 + \left(\frac{L^2}{L + R^2 C} \right)^2 \frac{1}{LC} = \frac{L \sqrt{R^2 + L/C}}{L + R^2 C},$$

$$R_2 = \sqrt{1 + (\omega RC)^2},$$

$$\delta_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \quad \text{и} \quad \delta_2 = \operatorname{arctg} (\omega RC).$$

II. 2.6. Пусть электрическое поле изменяется по закону

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}.$$

Тогда для плотности тока смещения J_d имеем

$$J_d = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{i\omega \epsilon_0 E}{4\pi},$$

а плотность тока проводимости равна σE . В случае равенства обоих токов по величине

$$\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon_0} = 1. \quad (1)$$

Определим теперь комплексный показатель преломления n :

$$n = \frac{1}{c} \sqrt{\left(\epsilon_0 - \frac{4\pi\sigma}{\omega} i \right) \mu_0} = \sqrt{1 - \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon_0} i}.$$

Принимая во внимание равенство (1), получаем

$$n = \sqrt{1 - i} = n_0 (1 - ix); \quad (2)$$

здесь n_0 и x — действительные положительные величины. Величина x называется коэффициентом поглощения. Из (2) находим

$$n_0 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} \approx 1,10 \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \approx 0,414. \quad (3)$$

Определим теперь коэффициент отражения. При нормальном падении волны он связан с показателем преломления следующим образом:

$$r = \left| \frac{n - 1}{n + 1} \right|^2 = \frac{(n_0 - 1)^2 + (n_0 \kappa)^2}{(n_0 + 1)^2 + (n_0 \kappa)^2}.$$

Подставляя сюда из (3) значения n_0 и κ , находим $r = 0,047$.

II. 2.7. Введение незаряженной проводящей сферы в однородное электрическое поле вызывает такое же возмущение поля за ее пределами, как и помещенный вместо нее в точке, совпадающей с центром сферы, электрический диполь с моментом $P = R^3 E_0$, где R — радиус сферы. Следовательно, возмущение внешнего поля в сферических координатах r , θ и φ можно охарактеризовать полем диполя с компонентами:

$$\mathbf{E}_r = \frac{2P \cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}}_1, \quad \mathbf{E}_\theta = \frac{P \sin \theta}{r^3} \hat{\mathbf{\theta}}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_\varphi = 0.$$

II. 3.1. Если электрон движется с ускорением, то он теряет свою энергию на излучение. Полная энергия электронно-протонной системы убывает со скоростью

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2a^2 e^2}{3c^3}, \quad (1)$$

где a — ускорение, e — заряд электрона, а c — скорость света. Ускорение электрона a связано с радиусом r его орбиты следующим образом:

$$ma = e^2/r^2,$$

откуда

$$a = e^2/mr^2. \quad (2)$$

Используя последнее выражение и учитывая, что $a = v^2/r$, находим полную энергию электронно-протонной системы

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}. \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) и (2) в (1), получаем

$$-\frac{e^2}{2r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{2e^6}{3m^2 r^4 c^3}, \quad (4)$$

или после очевидного упрощения

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4e^4}{3m^2 r^2 c^3}. \quad (5)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$T = \int_0^R dt = -\frac{m^2 c^3}{4e^4} \int_R^{a_0} 3r^2 dr = \frac{m^2 c^3}{4e^4} (R^3 - a_0^3);$$

здесь R — начальное расстояние между протоном и электроном, a_0 — радиус первой боровской орбиты.

II. 3.2. Полагая $r \neq 0$, запишем уравнение Пуассона в сферических координатах

$$\nabla^2 V \equiv \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r V(r) + \Lambda V(r) = -4\pi\rho(r), \quad (1)$$

где Λ — дифференциальный оператор, зависящий только от углов. В случае сферически симметричного потенциала $\Lambda V(r) = 0$. Подставляя в уравнение (1) выражение для $V(r)$ из условия задачи, получаем при $r \neq 0$

$$\rho(r) = -\frac{1}{4\pi r} \frac{d^2}{dr^2} e^{-\lambda r} = -\frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{4\pi r}.$$

Перейдем теперь к случаю $r \rightarrow 0$. Тогда

$$V(r) = \frac{e^{-\lambda r}}{r} \rightarrow \frac{1}{r}.$$

Но, как было показано в решении задачи II. 2.1,

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r).$$

Следовательно, в общем случае имеем

$$\rho(r) = \delta(r) - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{4\pi r}.$$

При $r \rightarrow 0$ вклад в общий заряд дает только член $\delta(r)$, поскольку объем пропорционален r^3 .

II. 3.3. Пусть E , E' и E'' — амплитуды электрического поля падающей, преломленной и отраженной волн соответственно. Известно, что плотность импульса плоской волны дается следующими выражениями:

для преломленной волны в диэлектрике¹⁾

$$G_1 = \frac{1}{4\pi c} E' H',$$

для падающей волны в воздухе

$$G_2 = \frac{1}{4\pi c} EH,$$

¹⁾ Мы уточнили здесь используемое автором выражение для плотности импульса электромагнитной волны [см., например, В. Л. Гинзбург, В. А. Угаров, УФН, 118, 175 (1976).] — Прим. ред.

и для отраженной волны в воздухе

$$G_r = \frac{1}{4\pi c} E'' H''.$$

Падающая волна передает единичной площадке среды в единицу времени импульс $P_2 = cG_2$, а преломленная и отраженная волны уносят импульс $P_{1,3} = \frac{c}{n} G_1 - cG_3$. В соответствии со вторым законом Ньютона давление на поверхность среды должно быть равным разности P_2 и $P_{1,3}$, т. е.

$$\text{Давление} = P_2 - P_{1,3} = \frac{1}{4\pi} \left(EH - \frac{1}{n} E' H' + E'' H'' \right).$$

В случае нормального падения волны E , E' и E'' связаны между собой довольно простыми соотношениями

$$E' = \frac{2}{n+1} E$$

и

$$E'' = \frac{n-1}{n+1} E,$$

а $H = E$, $H' = nE'$ и $H'' = E''$. После подстановки этих соотношений в формулу для давления находим

$$\begin{aligned} \text{Давление} &= \frac{1}{4\pi} E^2 \left[1 + \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 - \left(\frac{2}{n+1} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} E^2 \frac{n^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{1}{6,28} \cdot 10^{12} \cdot \frac{0,44}{2,2^2} = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ дин/см}^2. \end{aligned}$$

II. 3.4.

а) Пусть λ — линейная плотность заряда на цилиндре радиусом r_1 . По теореме Гаусса имеем¹⁾

$$\iint_A E_r dA = \frac{\lambda}{\epsilon}, \quad (1)$$

где A — площадь боковой поверхности цилиндрического сечения радиусом r и длиной, равной единице. Поскольку E_r зависит только от r , то из (1) сразу получаем

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}. \quad (2)$$

¹⁾ Автор использует рационализированную формулу (система СИ). Здесь ϵ — диэлектрическая проницаемость. В случае воздушной среды она совпадает с электрической постоянной $\epsilon = \epsilon_0$. В случае диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью K она равна $\epsilon = \epsilon_0 K$. — Прим. перев.

Разность потенциалов между двумя цилиндрами в соответствии с условиями задачи вычисляется следующим образом:

$$V = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [(1/K) \ln(r_3/r_1) + \ln(r_2/r_3)]. \quad (3)$$

Таким образом, емкость конденсатора

$$C = \frac{\lambda L}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{(1/K) \ln(r_3/r_1) + \ln(r_2/r_3)}. \quad (4)$$

б) Из выражения (3) можно найти плотность заряда λ :

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{(1/K) \ln(r_3/r_1) + \ln(r_2/r_3)}. \quad (5)$$

Применяя теорему Гаусса, определяем поле E в диэлектрике и в воздушном зазоре:

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 Kr}, & r_1 < r < r_3, \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, & r_3 < r < r_2. \end{cases} \quad (6)$$

Следовательно, электрическая индукция D в диэлектрике равна

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad r_1 < r < r_2, \quad (7)$$

а поляризация

$$P \equiv D - \epsilon_0 E = \begin{cases} \frac{(K-1)\lambda}{2\pi Kr}, & r_1 < r < r_3, \\ 0, & r_3 < r < r_2. \end{cases} \quad (8)$$

в) В случае когда разность потенциалов между обкладками конденсатора поддерживается постоянной, конденсатор уже нельзя рассматривать как изолированную систему. Он должен быть подключен к источнику зарядов (батарее), или к источнику энергии. Пусть C' — емкость конденсатора в отсутствие диэлектрика. Из выражения (4) мы имеем

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (9)$$

Работа, затрачиваемая на удаление диэлектрика, дается выражением

$$Работа = \frac{1}{2} C' V^2 - \frac{1}{2} CV^2 - (Q' - Q)V,$$

где Q' — заряд на одной из обкладок конденсатора после удаления диэлектрика. Поскольку $Q' = C'V$, а $Q = CV$, мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Работа} &= \frac{V^2}{2} (C - C') = \\ &= \frac{V^2}{2} 2\pi\epsilon_0 L \left(\frac{1}{(1/K) \ln(r_3/r_1) + \ln(r_2/r_3)} - \frac{1}{\ln(r_2/r_1)} \right); \end{aligned}$$

здесь мы использовали выражения (4) и (9) для C и C' .

II. 3.5.

а) Магнитную индукцию в тороидальном сердечнике вычисляют по формуле

$$B = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi d}.$$

Следовательно, полный поток Φ , пронизывающий поперечное сечение A этого тороида, равен

$$\Phi = \mu\mu_0 \frac{NIA}{2\pi d}, \quad d \gg \sqrt{A}.$$

б) Для эквивалентной магнитной цепи тороида справедливо следующее уравнение:

$$\Phi_1 R_1 + \Phi_2 R_2 = NI,$$

где R_1 — магнитное сопротивление части тороида с железом, а R_2 — магнитное сопротивление воздушного зазора. Учитывая, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$, и подставляя в последнее уравнение

$$R_1 = \frac{2\pi d - \delta}{\mu\mu_0 A} \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{\delta}{\mu_0 A},$$

находим

$$\Phi = \mu_0 \frac{NIA}{(2\pi d - \delta)/\mu + \delta} = \mu\mu_0 \frac{NIA}{2\pi d + (\mu - 1)\delta} \approx \mu\mu_0 \frac{NIA}{\mu\delta + 2\pi d}.$$

в)

$$\text{Энергия поля в железе} = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2 \times \text{Объем} = \frac{\mu\mu_0 N^2 I^2 A \delta}{\left(\frac{\mu\delta}{2\pi} + d\right)^2 4\pi}.$$

$$\text{Энергия поля в зазоре} = \frac{\mu^2 \mu_0 N^2 I^2 A \delta}{8\pi^2 [(\mu\delta/2\pi) + d]^2}.$$

Мы видим, что в случае $\mu \gg 1$ создание поля в зазоре сопряжено с большими затратами энергии даже при очень малой ширине зазора δ .

г) Индуктивность отдельного витка равна $d\Phi/dI$. Всего тороид содержит N витков, и каждый виток пронизывается общим магнитным потоком; следовательно,

$$L = N \frac{d\Phi}{dI}.$$

Подставляя сюда

$$\Phi = \frac{\mu\mu_0 NAI}{\mu\delta + 2\pi d},$$

находим

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 A}{\mu\delta + 2\pi d}.$$

II. 3.6.

а) Магнитная индукция, создаваемая током большой петли, в центре системы равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2b}. \quad (1)$$

Полный магнитный поток, пересекающий малую петлю, дается выражением

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2b} \cos \theta \quad (a \ll b), \quad (2)$$

где \mathbf{A} — ориентированная площадь малой петли, а θ — угол между осями петель. При вращении малой петли с постоянной угловой скоростью ω мы имеем $\theta = \omega t$. Э. д. с., наводимая в петле, равна $-d\Phi/dt$. Используя выражение (2), получаем для малой петли

$$\text{Э. д. с.} = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2b} \omega \sin \omega t. \quad (3)$$

Ток в малой петле I_1 определяем по закону Ома:

$$I_1 = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2bR} \omega \sin \omega t. \quad (4)$$

б) В соответствии с законом сохранения энергии механическая мощность $\tau d\theta/dt$ должна быть равна мощности тока, наведенного в петле, т. е.

$$\tau \frac{d\theta}{dt} = -I_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Используя выражения (4) и (2), получаем

$$\tau = -I_1 \frac{d\Phi}{d\theta} = -\frac{\pi a^2 \mu_0 I \omega}{2bR} \sin \omega t \quad \frac{d\Phi}{d\theta} = \left(\frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2b}\right)^2 \frac{\omega \sin^2 \omega t}{R}.$$

в) Из выражения (2) находим взаимную индуктивность двух петель

$$M = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\pi a^2 \mu_0}{2b} \cos \theta = \frac{\pi a^2 \mu_0}{2b} \cos \omega t.$$

Теперь можно определить э. д. с. взаимной индукции, наведенную в большой петле:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -M \frac{dI_1}{dt} = -M \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi a^2 \mu_0 I \omega}{2bR} \sin \omega t \right) = \\ &= -\frac{\pi^2 I \omega^2 a^4 \mu_0^2}{4b^2 R} \cos^2 \omega t = -\left(\frac{\pi a^2 \mu_0 \omega \cos \omega t}{2b} \right)^2 \frac{I}{R}.\end{aligned}$$

II. 4.1.

$$E = \frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{a} = -\frac{q^2}{a}.$$

II. 4.2.

$$\frac{\text{Электрич. притяжение}}{\text{Гравитац. притяжение}} = \frac{e^2}{G m_e m_p} = \frac{(4,8)^2 \cdot 10^{-20}}{6,67 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-27} \cdot 2000 \cdot 10^{-27}} \approx 10^{39}.$$

При вычислении этого отношения мы воспользовались значениями $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ, $m_e \approx 10^{-27}$ г, $m_p \approx 2000m_e$ и $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ ед. СГС.

II. 4.3. Потенциальная энергия взаимодействия точечного заряда q с плоскостью равна половине энергии взаимодействия двух точечных зарядов q и $-q$, разнесенных на расстояние $2d$. Следовательно,

$$E = -q^2/4d.$$

II. 4.4. Поле поверхностного заряда по обе стороны от пластиинки определяем по теореме Гаусса; оно равно $\pm 2\pi\sigma$ для $x \geq 0$. Применяя принцип суперпозиции полей, находим результирующее поле

$$E = E_0 \pm 2\pi\sigma \quad \text{для } x \geq 0.$$

II. 4.5. Пусть q' — заряд на внутренней сфере. Потенциал этой сферы равен сумме потенциалов, обусловленных зарядами q и q' соответственно:

$$V = q/r_2 + q'/r_1.$$

Поскольку внутренняя сфера заземлена, $V = 0$. Следовательно,

$$q' = -\frac{r_1}{r_2} q.$$

II. 4.6. Применяя закон Ампера

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I,$$

сразу находим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r.$$

II.4.7. Для постоянного тока

$$\frac{V_N}{V_{2N}} = \frac{R_N}{R_{2N}} = \frac{1}{2}.$$

Для высокочастотного тока

$$\frac{V_N}{V_{2N}} = \frac{Z_N}{Z_{2N}} \approx \frac{L_N}{L_{2N}} = \frac{N^2}{(2N)^2} = \frac{1}{4};$$

здесь L_i — индуктивность обмотки с числом витков i .

II.4.8. Сила взаимодействия между проводником и средой такая же, как и сила взаимодействия между двумя параллельными проводниками с током I , разнесенными на расстояние $2d$. Следовательно,

$$F = -2 \cdot 10^{-7} \frac{I^2}{2d} \text{ Н/м (притягивающая).}$$

II.4.9. Магнитная индукция B в центре петли записывается в виде

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}.$$

Теперь можно найти врачающий момент, действующий на булинку:

$$\text{Вращающий момент} = HMV = \frac{BMV}{\mu_0} = \frac{MVI}{2r}.$$

Здесь мы исходили из концепции взаимодействия постоянных магнитов. Однако если решать эту задачу с точки зрения взаимодействия круговых токов, то M следует заменить на $M' \equiv M/\mu_0$, а H — на B . Аналогичная ситуация встречается в задачах II.6.2 и II.7.3.

II.4.10. Прибор покажет напряжение, равное индуцированной идущим поездом э. д. с.:

$$\begin{aligned} \text{Э. д. с.} &= -\frac{d\Phi}{dt} = BLv = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot \frac{180 \cdot 10^3}{3,6 \cdot 10^3} = \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ Вб/с} = 10^{-3} \text{ В.} \end{aligned}$$

II.4.11. Искомая работа равна разности потенциальных энергий диполя до и после поворота его на 180° , т. е. $2pE \cos \alpha$.

II.4.12. В силу непрерывности тангенциальной составляющей напряженности электрического поля на границе имеем $E = E_0$. Отсюда следует, что электрическая индукция

$$D = KE = KE_0.$$

II.4.13. Как показано в решении задачи II.1.1 (в), $R = 2\sqrt{L/C}$.

II.4.14. Поскольку для освещенности монохроматическим светом справедлива следующая формула:

$$\text{Освещенность} = \left\langle \frac{c}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \right\rangle = \frac{c}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{c}{2\mu_0} B_0^2,$$

где E_0 и B_0 — амплитуды полей E и B , мы имеем

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,3 \cdot 10^3}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8}} \approx 10^3 \text{ В/м}$$

и

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \approx \frac{10^3}{3 \cdot 10^8} \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ Вб/м}^2.$$

II.4.15. Согласно теореме Гаусса, имеем следующее соотношение для нормальной составляющей напряженности E электрического поля:

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma / \epsilon_0.$$

Тангенциальная же составляющая электрического поля E сохраняется непрерывной. Следовательно,

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

II.4.16.

$$\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sim \frac{1}{r^2}.$$

II.4.17. 0,5 Гс.

II.4.18. Внутри проводящей сферы электрический потенциал равен¹⁾ $Q/4\pi\epsilon_0 R$.

II.4.19. В системе единиц СИ

$$\text{Плотность энергии} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right),$$

$$\text{Плотность импульса} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}.$$

II.4.20.

$$\begin{aligned} \text{Вектор Пойнтинга} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (RI\hat{\mathbf{k}}) \times \left(\frac{I}{2\pi b} \hat{\theta} \right) = \\ &= -\frac{RI^2}{2\pi b} \hat{\mathbf{r}}_1 \text{ (направлен внутрь провода).} \end{aligned}$$

II.5.1. Запишем сначала выражение для комплексной проводимости контура

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = \frac{1 - \omega^2 LC}{i\omega L}.$$

¹⁾ С точностью до произвольной постоянной. — Прим. ред.

Отсюда находим комплексное сопротивление

$$Z = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2/\omega_0^2}, \quad \text{где } \omega_0^2 \equiv 1/LC.$$

Поскольку $\omega^2 < \omega_0^2$, то Z имеет индуктивный характер.

II. 5.2. 0.

II. 5.3. Цепь из последовательно соединенных конденсаторов обладает емкостью C/N , где C — емкость каждого конденсатора. Результирующее напряжение равно

$$\frac{Q}{C/N} = N \frac{Q}{C} = NV$$

(Q — заряд на каждом конденсаторе), поскольку $V = Q/C$.

II. 5.4. 4L.

II. 5.5. Используя тот факт, что диэлектрик не оказывает влияния на величину электрической индукции D , мы находим

$$W = \frac{D^2}{2K\epsilon_0} = \frac{D_0^2}{2K\epsilon_0} = \frac{W_0}{K}.$$

Другое доказательство:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} (KC_0) \left(\frac{V}{K} \right)^2 = \frac{W_0}{K}.$$

II. 5.6. $E \sim \frac{1}{r}$, так как энергия волны убывает по закону обратных квадратов.

II. 5.7. Из условия непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля имеем

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_R = 0, \quad \text{или} \quad \mathbf{E}_R = -\mathbf{E},$$

где \mathbf{E}_R — электрический вектор отраженной волны. Как видно, он сдвинут по фазе на 180° относительно электрического вектора падающей волны \mathbf{E} .

II. 5.8. Больше. (Под действием сил притяжения заряды на металлических сферах перераспределяются таким образом, что расстояние между ними уменьшается.)

II. 5.9.

$$F = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}.$$

Сила вызывает притяжение проводов,

II. 5.10.

а) Криволинейный интеграл от напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равен полному намагничивающему току через поверхность, натянутую на этот контур:

$$\oint H dl = I = ni;$$

здесь n — число витков провода. Поскольку ширина зазора значительно меньше диаметра полюсов магнита, то поле в зазоре можно считать однородным. В этом случае приведенная выше формула принимает вид

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = ni,$$

где индексы 1 и 2 относятся к полям в воздушном зазоре и в железном сердечнике соответственно. H_1 и H_2 связаны с B_1 и B_2 соотношениями

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{B_1}{\mu_0}, \quad H_2 = \frac{B_2}{\mu_2} = \frac{B_2}{\mu \mu_0}.$$

В случае очень узкого зазора $B_1 \approx B_2$, и мы получаем

$$\frac{B}{l} = \frac{n \mu_0}{l_1 + l_2 / \mu} \approx 2,5 \text{ Вб}/(\text{м}^2 \cdot \text{А}).$$

б) Для тока $i = 0,5$ А имеем $\mu_0 H = 1,25 \cdot 10^{-3}$ Вб/м². При увеличении тока i до 1 А значение $\mu_0 H$ становится равным $2,5 \cdot 10^{-3}$ Вб/м². Из приведенного в условии задачи графика $B(H)$ определяем $B \approx 1,7$ Вб/м² (тогда как при отсутствии насыщения $B = 2,5$ Вб/м²).

II. 5.11.

а) В системе устанавливается стационарное движение, когда индуцированная в ней э. д. с. компенсирует напряжение источника, т. е. когда

$$Blv = V.$$

Отсюда находим

$$v = V/Bl.$$

б) В любой момент времени t по стержню протекает ток¹⁾

$$i = \frac{V - Blv}{R}.$$

Отсюда находим уравнение движения стержня

$$m \ddot{v} = F_x \equiv \frac{V - Blv}{R} Bl.$$

¹⁾ Автор пренебрегает реакцией тока i , порождающего противодействующее магнитное поле. — Прим. ред.

Его решение с учетом начального условия, а именно $v = 0$ при $t = 0$, записывается в виде

$$v = \frac{V}{Bl} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2 t}{mR}} \right).$$

в) В этом случае уравнение движения принимает вид

$$m\dot{v} = \frac{V - Blv}{R} Bl - F.$$

Движение является установившимся, если $\dot{v} = 0$. Отсюда получаем

$$v = \frac{V}{Bl} - \frac{FR}{(Bl)^2}.$$

г) При условии, указанном в п. «в» нашей задачи, ток в стержне равен

$$i = \frac{V - Blv}{R} = \frac{F}{Bl}.$$

Отбираемая от источника мощность равна Vi . Часть этой мощности величиной Fv преобразуется в механическую работу. Следовательно,

$$K. n. \partial. = \frac{Fv}{Vi} = F \frac{(V/Bl) - FR/B^2 l^2}{FV/Bl} = 1 - \frac{FR}{VBl}.$$

II. 5.12.

а) Запишем уравнение цепи

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Отсюда находим

$$Q = Q_0 e^{-t/RC}.$$

б) Поскольку заряд Q распределен равномерно по поверхности пластины конденсатора, часть этого заряда, сосредоточенная вне круга радиусом ρ , равна

$$q = \frac{Q}{r_0^2} (r_0^2 - \rho^2) = \frac{Q_0 (r_0^2 - \rho^2)}{r_0^2} e^{-t/RC}.$$

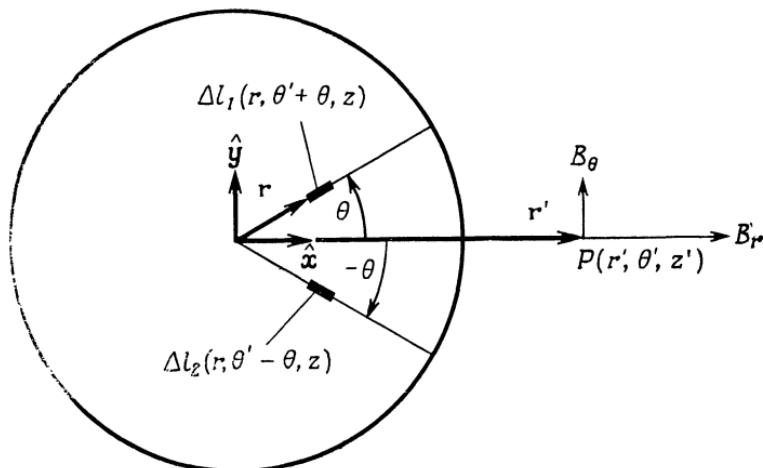
Отсюда находим ток через круговое сечение радиусом ρ :

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q_0 (r_0^2 - \rho^2)}{r_0^2 RC} e^{-t/RC}.$$

в) Магнитное поле определяем по закону Ампера:

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 Q_0}{2\pi R C r} e^{-t/RC}.$$

г) Присутствие только θ -компоненты магнитного поля можно объяснить следующим образом (см. фиг. 1). Вычислим магнитные поля B_r и B_z в произвольной точке $P(r', \theta', z')$, где r' , θ' и z' — цилиндрические координаты рассматриваемой точки. Для этого определим сначала поля, индуцированные в данной точке токами, текущими по двум элементарным радиальным отрезкам Δl_1 и Δl_2 с координатами $(r, \theta' + \theta, z)$ и $(r, \theta' - \theta, z)$.



Фиг. 1.

В точке P (для простоты она выбрана в плоскости x, z) индуцируются поля

$$\mathbf{B}_1 \sim \mathbf{i}_1 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \sim (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \times [(r \cos \theta - r') \hat{x} + r \sin \theta \hat{y} + (z - z') \hat{z}]$$

и

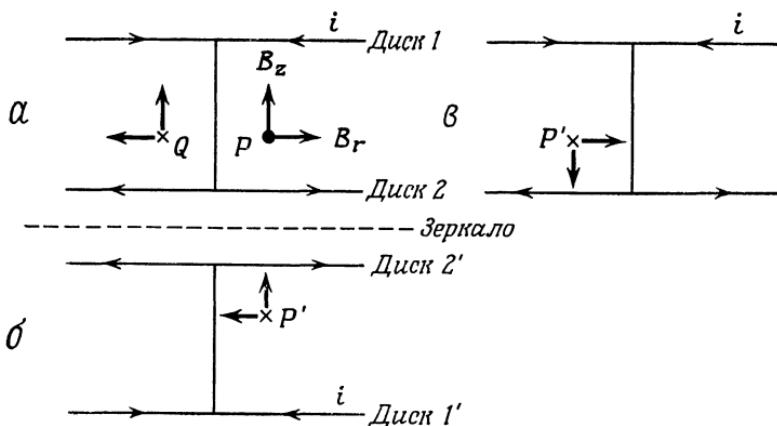
$$\mathbf{B}_2 \sim (\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y}) \times [(r \cos \theta - r') \hat{x} - r \sin \theta \hat{y} + (z - z') \hat{z}].$$

Следовательно,

$$\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \sim 2 \cos \theta (z - z') (\hat{x} \times \hat{z}) = -2 \cos \theta (z - z') \hat{y} = -2 \cos \theta (z - z') \hat{\theta}.$$

Отсюда видно, что компоненты B_r и B_z магнитного поля, индуцированного в точке P токами на обоих отрезках, обращаются в нуль. Если проинтегрировать этот результат по r и θ и сложить затем полученные поля токов в обеих пластинах, то получим как раз искомое магнитное поле между пластинами конденсатора. Из проведенного нами решения можно сделать вывод, что единственная, отличная от нуля компонента магнитного поля имеет направление θ .

Другое доказательство. Поскольку векторы тока и положения точки являются полярными, то из закона Ампера следует, что магнитное поле представляет собой аксиальный вектор. Если считать законы электромагнетизма инвариантными относительно зеркального отражения пространства, то при таком отражении вектор магнитного поля должен изменять свое направление в пространстве. Пусть P и Q — две точки на плоскости, симметрично расположенные относительно центрального проводника (см. фиг. 2, а). В силу аксиальной симметрии магнитного поля



Фиг. 2.

компоненты B_r и B_z в этих точках связаны друг с другом так, как показано на фиг. 2, а. Пусть точка P' является зеркальным отражением точки P . Как видно из фиг. 2, б, компоненты магнитного поля в точке P' должны быть противоположны по направлению компонентам поля, отраженным в зеркале. Повернем теперь картину на фиг. 2, б на 180° . Тогда получим ситуацию, показанную на фиг. 2, в. Сравнивая ее с фиг. 2, а, мы видим, что точка P' совпадает с точкой Q , а направление поля B_r (B_z) в точке P' противоположно направлению соответствующего поля в точке Q . Следовательно, компоненты B_r и B_z должны отсутствовать.

II. 5.13.

$$\begin{aligned} \text{Скорость} &= \text{Частота} \times \text{Длина волны} = \\ &= 4 \cdot 10^{14} \cdot 5 \cdot 10^{-7} = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Показатель преломления

$$n = c/v = {}^3/{}_2.$$

Длина волны в воздухе

$$\lambda_0 = n\lambda = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

II. 6.1.

а) Снаружи магнитное поле равно нулю, а в зазоре между пластинами оно отлично от нуля и является приблизительно однородным. Из формулы

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I,$$

где вектор $d\mathbf{s}$ перпендикулярен плоскости рисунка, получаем

$$Bb \approx \mu_0 I, \quad \text{или} \quad B \approx \frac{\mu_0 I}{b}$$

(вектор \mathbf{B} направлен от читателя к плоскости рисунка). Здесь мы учли, что $a \ll b$ и тем самым пренебрегли членами, зависящими от a/b .

б) Индуктивность цепи определяем по формуле

$$L = \left| \frac{d\Phi/dt}{dI/dt} \right| = \left| \frac{d\Phi}{dI} \right| = \frac{d}{dI} (BA) = \frac{d}{dI} \left(\frac{\mu_0 I}{b} la \right) = \frac{\mu_0 la}{b}.$$

в) Уравнение данной электрической цепи записывается в виде

$$V_0 - L \frac{di}{dt} = 0,$$

откуда находим

$$i = \frac{V_0}{L} t.$$

г) Индуктивность обеих пластин на расстоянии x от закороченного конца равна

$$L_1 = \frac{\mu_0 xa}{b}.$$

Следовательно,

$$V_x = L_1 \frac{di}{dt} = \frac{\mu_0 xa}{bL} V_0.$$

д) На расстоянии x от закороченного конца имеем

$$\text{Поток энергии} = V_x i = \frac{\mu_0 xa V_0}{bL} \frac{V_0}{L} t = \frac{\mu_0 xa}{b} \left(\frac{V_0}{L} \right)^2 t.$$

II. 6.2. При $L \gg R$ две петли с током взаимодействуют подобно двум магнитным диполям с моментами $\mu_0 IA$, где A — площадь петли. Индукцию B внутри второй петли, обусловленную током в первой петле, можно представить в виде векторной суммы двух компонент: B_r — в направлении возрастания радиус-вектора r и B_θ — в направлении увеличения угла θ . Мы имеем

$$B_r = \frac{\mu_0}{2} IR^2 \frac{\cos \theta}{L^3} = \frac{\mu_0}{2} IR^2 \frac{x}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4} IR^2 \frac{\sin \theta}{L^3} = \frac{\mu_0}{4} IR^2 \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Здесь $x = L \cos \theta$, $y = L \sin \theta$, а $\mu_0 I \pi R^2$ — эквивалентный дипольный момент отдельной петли. Вращающий момент, действующий на вторую петлю, можно вычислить по формуле

$$\tau = I\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mu_0 I (\mathbf{A} \times \mathbf{H}),$$

или

$$\tau = I\pi R^2 (B_r \sin \theta + B_\theta \cos \theta) = \frac{3\pi\mu_0 I^2 R^4 \sin \theta \cos \theta}{4L^3}.$$

Вектор вращающего момента направлен в плоскость чертежа. Сила, действующая на вторую петлю, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\theta + \mathbf{F}_r,$$

где

$$F_\theta = IR^2 \frac{dB_\theta}{dx} = -\frac{\mu_0}{4} I^2 R^4 y \frac{2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^3} = -\mu_0 (IR^2)^2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^3} = -\mu_0 (IR^2)^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{L^4}$$

и

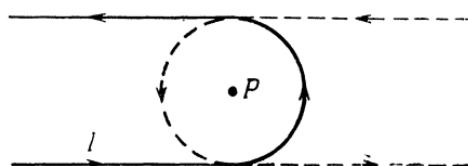
$$F_r = IR^2 \frac{dB_r}{dx} = \frac{1}{2} \mu_0 (IR^2)^2 \frac{y^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{1}{2} \mu_0 (IR^2)^2 \frac{\sin^2 \theta - 3 \cos^2 \theta}{L^4}.$$

II. 6.3. Магнитное поле в точке P , обусловленное током I в прямолинейных частях рассматриваемого провода, равно полю тока той же величины, протекающего в бесконечном прямолинейном проводе, расположенному от точки P на расстоянии r . Поле, создаваемое током I вдоль полуокружности, равно в точности половине поля кругового тока I . Следовательно, в точке P магнитное поле

$$B = 2 \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (2 + \pi).$$

Оно направлено по нормали к плоскости чертежа.

Приведенное здесь решение станет очевидным, если ввести в рассмотрение другой идентичный контур, как показано на рисунке штриховой линией. Теперь мы имеем два бесконечных прямолинейных провода и один круговой контур — все с токами I . Поскольку поле в точке P не зависит от поворота одного изогнутого провода относительно другого в плоскости чертежа и поля токов попросту суммируются, то поле тока в одном изогнутом проводе равно половине поля, обусловленного токами во всей рассматриваемой системе проводов.



II. 6.4. Волновое уравнение в случае прямоугольного резонатора имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 \right) \psi = 0, \quad (1)$$

где

$$\gamma^2 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2,$$

а вместо ψ может стоять любой из векторов **E** или **B** электромагнитного поля. Границные условия для полей записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ при } x = 0, a \text{ и } y = 0, b.$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\psi_{mn}(x, y) = B_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (2)$$

где $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Подставляя это решение в (1), находим

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \quad (3)$$

Зависимость полей от координаты z соответствует стоячим волнам:

$$\psi_k(z) = A \sin kz + C \cos kz.$$

Для выполнения граничных условий при $z = 0$ и $z = d$ множитель k должен удовлетворять соотношению

$$k = \frac{l\pi}{d}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Собственные частоты резонатора определяем из формулы для γ после подстановки в нее выражений (4) и (3):

$$\omega_{mn} = \frac{\pi c}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{l^2}{d^2}}.$$

В случае $a > b > d$ самая низкая частота колебаний соответствует значениям $m = 1, n = 0$ и $l = 0$, т. е.

$$\omega_{100} = \frac{\pi c}{a \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

Этой частоте соответствует поле

$$\psi_{100} = \psi_{10}(x, y) \psi_0(z) \sim \cos \frac{\pi x}{a},$$

II. 6.5.

а) Уравнения Максвелла с учетом закона Ома $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ и в пренебрежении токами смещения¹⁾ записываются в виде

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

В случае гармонических колебаний с частотой ω во втором уравнении можно исключить поле \mathbf{E} и получить следующее волновое уравнение:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} i \mathbf{H} = 0\tag{2}$$

в предположении, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kr)}.$$

При нормальном падении плоской волны вектор \mathbf{H} параллелен границе раздела. Следовательно,

$$\nabla \approx -\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z},$$

а поскольку

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{H},$$

то уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} i (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = 0.\tag{3}$$

где $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{H}^t$. Это и есть искомое уравнение в частных производных.

б) Поскольку разность потенциалов электрического поля между двумя точками не зависит от пути, соединяющего эти точки, должно выполняться условие $\mathbf{E}^t = \mathbf{E}_c^t$, т. е. тангенциальная компонента электрического поля должна быть непрерывной. Если металл обладает высокой проводимостью, то заряды в его поверхностном слое движутся в такт с изменением электрического поля падающей плоской волны и \mathbf{H}_c^t в глубине металла отсутствует. Мы имеем

$$\mathbf{H}^t = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_c^t = 0,\tag{4}$$

1) Пренебрежение токами смещения соответствует переходу к квазистационарному приближению, в котором не учитывается запаздывание, а, значит, не могут быть описаны и электромагнитные волны. Таким образом, в этой задаче поле внутри проводника, описываемое получаемым ниже уравнением (2), не является волновым. — Прим. ред.

где \mathbf{K} — поверхностный ток, протекающий примерно в толще скин-слоя; $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{E}^t$. При $z \rightarrow 0$ из (4) имеем $\mathbf{H}^t = \mathbf{H}_c^t$.

в) Используя уравнение (3), можно найти

$$\mathbf{H}_c^t = \mathbf{H}^t e^{-\frac{1+i}{\delta} z}. \quad (5)$$

Входящая в это выражение величина δ называется толщиной скин-слоя:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}}.$$

Подставляя (5) во второе уравнение Максвелла (1), получаем

$$\mathbf{E}^t = -\sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} (1+i) (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^t) |_{z=0}.$$

Таким образом, находим поверхностный импеданс

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} (1+i).$$

II. 6.6. Магнитное поле на поверхности провода имеет компоненты

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \text{и} \quad B_r = 0, \quad (1)$$

где a — радиус провода. Электрическое поле связано с разностью потенциалов $V = IR$ на отрезке длиной L следующим образом:

$$E_L = \frac{V}{L} = \frac{IR}{L} = \frac{I}{\sigma A}. \quad (2)$$

Оно направлено вдоль провода. Вектор Пойнтинга на поверхности провода

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0} \frac{IR}{L} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot (-\hat{\mathbf{r}}_1) = -\frac{I^2 R}{2\pi a L} \hat{\mathbf{r}}_1, \quad (3)$$

где $\hat{\mathbf{r}}_1$ — единичный вектор нормали. Как видно, вектор Пойнтинга направлен по радиусу внутрь проводника.

Энергия поля, поглощаемая проводом на длине L в единицу времени, равна

$$W = 2\pi a L S = I^2 R,$$

и она преобразуется в джоулево тепло.

II. 7.1.

а) В соответствии с законом Ампера

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I', \quad (1)$$

где I' — ток через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, по которому производится интегрирование.

1) $r < a$. В этом случае $I' = Ir^2/a^2$, и из (1) получаем

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}. \quad (2)$$

2) $a < r < b$. $I' = I$, и из (1) следует

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (3)$$

3) $b < r < c$.

$$I' = I - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} I = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I,$$

и из (1) находим

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}.$$

4) $r > c$. В этом случае $I' = 0$. Следовательно, $B_\theta = 0$. Радиальные компоненты поля и компоненты вдоль оси z тождественно равны нулю во всех четырех областях.

б) Согласно определению,

$$L = \left| \frac{d\Phi/dt}{dI/dt} \right| = \left| \frac{d\Phi}{dI} \right|; \quad (4)$$

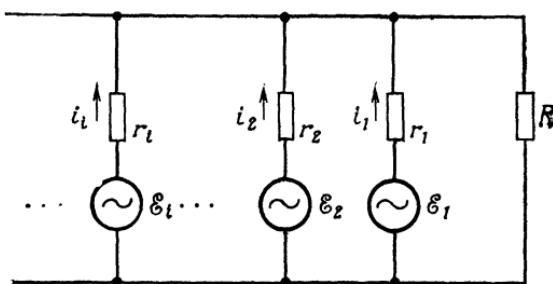
здесь Φ — полный магнитный поток, пронизывающий сечение $ABCD$. Используя выражение (3), находим

$$\Phi = l \int_a^b B_\theta dr = \frac{l\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Следовательно, индуктивность

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

II. 7.2.



а) Сначала докажем общую теорию о том, что любой такой «черный ящик» эквивалентен одному источнику э. д. с. с последовательно включенным резистором. Приведенная на рисунке

схема показывает, как можно в самом общем виде соединить различные источники э. д. с. и резисторы внутри черного ящика. Пусть i_i — ток в i -й ветви электрической цепи. Для каждого замкнутого контура этой цепи можно составить следующее уравнение:

$$\mathcal{E}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} i_j + b_i R I, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где a_{ij} и b_i — коэффициенты, зависящие от сопротивлений резисторов. Систему (1) следует дополнить уравнением сохранения полного тока

$$\sum_{j=1}^N i_j = I. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1), находим токи i_j :

$$i_j = \sum_{i=1}^N (\mathcal{E}_i - b_i R I) A_{ij}, \quad j = 1, \dots, N; \quad (3)$$

здесь (A_{ij}) — обратная матрица по отношению к (a_{ij}) . Подставляя выражение (3) в (2), имеем

$$\sum_{j=1}^N (\mathcal{E}_i - b_i R I) A_{ij} = I,$$

или

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i A_{ij} = I \left(1 + R \sum_{i=1}^N b_i A_{ii} \right). \quad (4)$$

Введем теперь обозначения

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i A_{ij}}{\sum_{i=1}^N b_i A_{ii}} \quad \text{и} \quad r = \frac{1}{\sum_{i=1}^N b_i A_{ii}}.$$

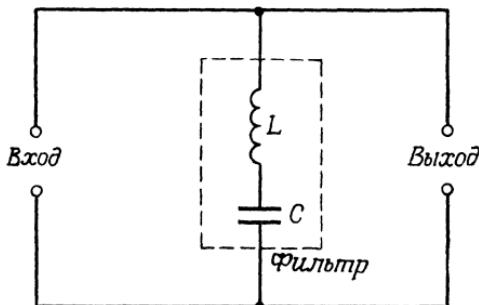
Тогда выражение (4) принимает вид

$$\mathcal{E} = I(R + r), \quad (5)$$

где \mathcal{E} — э. д. с. эквивалентного источника, r — сопротивление эквивалентного резистора.

Подставляя данные из условия задачи, получаем $\mathcal{E} = 12$ В и $r = 2$ Ом. Следовательно, чтобы в цепи протекал ток силой 0,1 А, нужно подключить резистор с сопротивлением $R = 118$ Ом.

б) Чтобы снизить пульсации напряжения частотой 60 Гц, фильтр, показанный на рисунке, должен иметь при этой частоте



очень низкое сопротивление. Следовательно,

$$LC = \frac{1}{\omega^2} = \left(\frac{1}{120\pi} \right)^2 \approx 7 \cdot 10^{-6}.$$

II. 7.3.

а)

$$\xrightarrow{\mu_1} \xleftarrow{\mu_2} E_{\max} = -\mu_1 \cdot H_2 = -\mu_1 \frac{\mu_2 \cos \pi}{2\pi r^3 \mu_0} = \frac{\mu_1 \mu_2}{2\pi \mu_0 r^3}.$$

б)

$$\xrightarrow{\mu_1} \xrightarrow{\mu_2} E_{\min} = -\mu_1 \cdot H_2 = -\mu_1 \frac{\mu_2 \cos 0}{2\pi r^3 \mu_0} = -\frac{\mu_1 \mu_2}{2\pi \mu_0 r^3}.$$

II. 7.4. Напряжение на конденсаторе изменяется по закону

$$V = V_0 (1 - e^{-t/RC}).$$

Подставляя сюда $V_0 = 100$ В и $V = 50$ В, находим

$$t = RC \ln 2 = (\ln 2) \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

II. 7.5. Перпендикулярная полю компонента скорости электрона равна

$$v_{\perp} = \frac{10^4}{\sqrt{2}} \text{ см/с} = 7,071 \cdot 10^3 \text{ см/с.}$$

Из условия равенства сил

$$\frac{mv_{\perp}^2}{R} = \frac{ev_{\perp}H}{c}$$

находим радиус траектории электрона

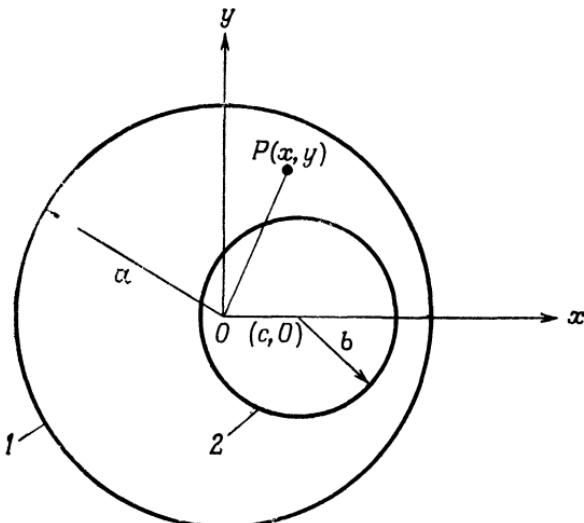
$$R = \frac{cv_{\perp}m}{eH} = \frac{(3 \cdot 10^{10})(7,1 \cdot 10^3)(0,91 \cdot 10^{-27})}{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^4} = 4,0 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Зная v_{\perp} и R , находим частоту

$$f = v_{\perp} / 2\pi R = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ Гц.}$$

Таким образом, электрон движется по спирали радиусом $R = 4 \cdot 10^{-8}$ см с шагом $v_{\perp} (2\pi mc/eH) = 2\pi R = 25 \cdot 10^{-8}$ см.

II. 7.6.



Рассматриваемую систему можно мысленно заменить двумя сплошными проводниками 1 и 2 радиусами a и b , по которым текут токи с плотностью J , что и в исходном проводнике. Только ток в проводнике 1 совпадает по направлению с током в исходном проводнике, а в проводнике 2 он имеет противоположное направление. Согласно принципу суперпозиции поле в любой точке пространства не изменится при такой замене. Применяя закон Ампера, находим магнитную индукцию B_1 , обусловленную током в проводнике 1:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r},$$

или

$$B_1 = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi (a^2 - b^2)}, & r < a, \\ \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi r (a^2 - b^2)}, & r > a. \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

При этом мы использовали выражения для плотности тока

$$J = \frac{I}{\pi (a^2 - b^2)};$$

$$i = J \cdot \text{Площадь} = \frac{Ir^2}{a^2 - b^2} \quad \text{при} \quad r \leq a.$$

В прямоугольной системе координат, показанной на рисунке, вектор магнитной индукции \mathbf{B}_1 записывается в виде

$$\mathbf{B}_1 = B_1 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\mathbf{x}} - B_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\mathbf{y}}.$$

Мы предположили, что в проводнике 1 ток течет по направлению от читателя. Аналогично находим выражение для магнитной индукции B_2 , индуцированной током в проводнике 2:

$$B_2 = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r'}{2\pi(a^2 - b^2)}, & r' \equiv \sqrt{(x - c)^2 + y^2} < b, \\ \frac{\mu_0 I b^2}{2\pi r'(a^2 - b^2)}, & r' > b. \end{cases}$$

Для вектора магнитной индукции \mathbf{B}_2 имеем

$$\mathbf{B}_2 = -B_2 \frac{y}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}} \hat{\mathbf{x}} + B_2 \frac{x - c}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}} \hat{\mathbf{y}}.$$

Искомое поле \mathbf{B} равно векторной сумме \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \left(\frac{B_1 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{B_2 y}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{B_1 x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{B_2(x - c)}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}} \right) \hat{\mathbf{y}}.$$

В области $r > a$ имеем

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a^2 - b^2)} \left[y \left(\frac{a^2}{x^2 + y^2} - \frac{b^2}{(x - c)^2 + y^2} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{xa^2}{x^2 + y^2} - \frac{b^2(x - c)}{(x - c)^2 + y^2} \right) \hat{\mathbf{y}} \right].$$

В области $r' < b$ (и $r < a$)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a^2 - b^2)} \left[(y - y) \hat{\mathbf{x}} + (x - c - x) \hat{\mathbf{y}} \right] = -\frac{\mu_0 I c}{2\pi(a^2 - b^2)} \hat{\mathbf{y}}.$$

Наконец, в области $r' > b$ (но $r < a$)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a^2 - b^2)} \left[\left(y - \frac{b^2 y}{(x - c)^2 + y^2} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(x - \frac{b^2(x - c)}{(x - c)^2 + y^2} \right) \hat{\mathbf{y}} \right].$$

II.8.1. При решении задачи влиянием индуктивности рамки можно пренебречь, поскольку мы рассматриваем довольно большой промежуток времени $T_1 = 10^{-4}$ с; кроме того, магнитное поле рамки пренебрежимо мало по сравнению с внешним полем. Следовательно, мы можем считать ток в рамке при $t \leq 10^{-4}$ с постоянным и равным 0,1 А. В магнитном поле B на боковые стороны рамки действуют силы

$$F_h = BIh = 10^{-3} \text{ Н} = 10^2 \text{ дин}, \quad (1)$$

а силы, действующие на верхнюю и нижнюю стороны рамки, равны нулю. Следовательно, импульс силы, действующей на каждую из боковых сторон, равен

$$\hat{F} = F_h \Delta t = 10^2 \text{ дин} \cdot 10^{-4} \text{ с} = 10^{-2} \text{ дин} \cdot \text{с}, \quad (2)$$

а импульс момента

$$\hat{\tau} = 0,02 \text{ дин} \cdot \text{см} \cdot \text{с}. \quad (3)$$

Момент инерции диска

$$I = \int_0^{D/2} \rho h x^2 2\pi x dx = \pi/2 \text{ г} \cdot \text{см}^2. \quad (4)$$

Начальная угловая скорость диска

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\hat{\tau}}{I} = \frac{0,02}{\pi/2} \approx 0,013 \text{ рад/с.}$$

При вращении диска и рамки с угловой скоростью $\dot{\theta}$ в рамке наводится электродвижущая сила $\dot{\theta}BhD \cos \theta$ и ток i , равный $\dot{\theta}BhD \cos \theta/R$. Следовательно, на рамку со стороны поля действует вращающий момент

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -DhiB \dot{\theta} \cos \theta = -\frac{B^2 h^2 D^2 \cos^2 \theta}{R} \dot{\theta} = -4 \cdot 10^{-8} \dot{\theta} \cos^2 \theta \text{ Н} \cdot \text{м} = \\ &= -0,4 \dot{\theta} \cos^2 \theta \text{ дин} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$

Пусть ω_0 — собственная частота колебаний маятника:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 0,628 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку $\dot{\theta}_0 \ll \omega_0$ ¹⁾, то амплитуда колебаний мала: $A \ll 1$. Тогда уравнение движения диска записывается в виде

$$I\ddot{\theta} + I\omega_0^2\theta = \tau_1,$$

или

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{\tau_1}{I} = -\frac{B^2 h^2 D^2 \cos^2 \theta}{IR} \dot{\theta} \approx -\frac{B^2 h^2 D^2}{IR} \dot{\theta} = -b\dot{\theta}, \quad (5)$$

где $b = B^2 h^2 D^2 / IR = 0,26$. Здесь, поскольку отклонение θ мало, мы положили $\cos^2 \theta \approx 1$. Решение уравнения (5) имеет вид

$$\theta = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t},$$

где

$$\omega_{\pm} = \frac{b \pm j\sqrt{4\omega_0^2 - b^2}}{2} = 0,13 \pm 0,615j \quad (j = \sqrt{-1}).$$

¹⁾ И начальное отклонение равно нулю. — Прим. ред.

Подставляя начальные условия $\theta = 0$ и $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ при $t = 0$, имеем

$$B = -A \quad \text{и} \quad A(\omega_+ - \omega_-) = \dot{\theta}_0,$$

откуда находим

$$A = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_+ - \omega_-} = \frac{0,013}{1,23j} = -0,0106j \text{ рад.}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \theta &= -0,0106 [e^{(-0,13+0,615j)t} - e^{(-0,13-0,615j)t}] j = \\ &= 0,0212e^{-0,13t} \sin(0,615t). \end{aligned}$$

Рамка с диском совершают затухающие колебания, амплитуда которых убывает по закону $0,0212e^{-0,13t}$.

II.8.2. Ток сильно возрастает при частоте 1000 Гц. Этот факт заставляет предполагать, что внутри ящика элементы L и C соединены последовательно. Условие резонанса записывается как

$$LC = \frac{1}{\omega_R^2} = \frac{1}{(2\pi)^2 \cdot 10^6}. \quad (1)$$

При постоянном напряжении 100 В в цепи протекает ток 0,1 А. Отсюда находим сопротивление резистора

$$R = \frac{V}{I} = 1000 \text{ Ом.}$$

Резистор должен быть подключен параллельно цепи LC . Комплексная проводимость такой цепи дается выражением

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L - j/\omega C},$$

где $j = \sqrt{-1}$. Отсюда находим полный импеданс цепи

$$Z = \frac{e^{j\Phi}}{\sqrt{(1/R^2) + [\omega C/(\omega^2 LC - 1)]^2}}; \quad (2)$$

здесь

$$\Phi = \arctg \frac{\omega RC}{\omega^2 LC - 1}.$$

В соответствии с условием задачи при переменном напряжении $U_{\text{эфф}} = 100$ В, круговая частота которого $\omega = 2\pi \cdot 60$ рад/с, в цепи течет ток $I_{\text{эфф}} = 1$ А. Следовательно,

$$|Z| = \frac{U_{\text{эфф}}}{I_{\text{эфф}}} = 100 \text{ Ом.} \quad (3)$$

Из выражений (1) — (3) мы можем найти L и C . Имеем

$$\frac{1}{R^2} + \left(\frac{\omega C}{\omega^2/\omega_R^2 - 1} \right)^2 = 10^{-4},$$

откуда получаем $C = 2,63 \cdot 10^{-5}$ Ф. Индуктивность определяем из формулы (1): $L = 0,965 \cdot 10^{-3}$ Г.

II.8.3. Запишем уравнения Максвелла в дифференциальной форме, предполагая, что поля изменяются по закону $e^{-j\omega t}$ ($j^2 = -1$):

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu \mathbf{H}}{c} = j \frac{\mu \omega}{c} \mathbf{H}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{J} + \frac{\epsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E} - j \frac{\epsilon \omega}{c} \mathbf{E} = \frac{\sigma - j \omega \epsilon}{c} \mathbf{E}. \quad (4)$$

Исключая \mathbf{H} из уравнения (3) или \mathbf{E} из (4), получаем

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{j \omega \mu}{c^2} (\sigma - j \omega \epsilon) \mathbf{E} \quad (5)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \frac{j \omega \mu}{c^2} (\sigma - j \omega \epsilon) \mathbf{H}. \quad (6)$$

Предположим, что плоская волна распространяется в направлении x . Тогда поля \mathbf{E} и \mathbf{H} являются функциями только x и t . Таким образом, уравнения (5) и (6) для отдельных компонент записываются в виде

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 E_y}{d^2 x} &= \frac{\omega \mu}{c^2} (j\sigma + \omega \epsilon) E_y, \\ -\frac{d^2 E_z}{d^2 x} &= \frac{\omega \mu}{c^2} (j\sigma + \omega \epsilon) E_z, \\ -\frac{d^2 H_y}{d^2 x} &= \frac{\omega \mu}{c^2} (j\sigma + \omega \epsilon) H_y, \\ -\frac{d^2 H_z}{d^2 x} &= \frac{\omega \mu}{c^2} (j\sigma + \omega \epsilon) H_z. \end{aligned}$$

Общее решение всех этих уравнений имеет вид

$$A = A_0 e^{j k x},$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \epsilon + j \frac{\mu \sigma}{\omega}}$$

— комплексное волновое число.

II. 8.4. Кинетическая энергия налетающей частицы минимальна, когда все частицы после столкновения движутся с одинаковыми скоростями. В данном случае это объясняется тем, что после столкновения все частицы относительно центра масс системы находятся в покое. Следовательно, инвариантная масса частиц после столкновения равна в точности сумме масс всех этих частиц:

$$M = m_p + m_n + 2m_{p^-} \approx 5m_p. \quad (1)$$

Закон сохранения энергии и импульса можно записать в форме для 4-векторов:

$$P_p + P_d = P_f \equiv P_{p_1} + P_n + P_{p^-} + P_p + P_{p^-}. \quad (2)$$

Квадраты 4-векторов импульса являются инвариантами:

$$(P_p \cdot P_p) = -m_p^2, \quad (P_d \cdot P_d) = -m_d^2 \quad \text{и} \quad (P_f \cdot P_f) = -M^2. \quad (3)$$

Здесь всюду принималось $c = 1$. Возведем равенство (2) в квадрат. Тогда, приняв во внимание (3), получим

$$m_p^2 + m_d^2 + 2E_p m_d = M^2;$$

здесь E_p — полная энергия протона. Она равна

$$E_p = \frac{M^2 - m_p^2 - m_d^2}{2m_d} = \frac{5}{2} m_p.$$

Следовательно, кинетическая энергия K_p налетающего протона равна

$$K_p = E_p - m_p = 3752 \text{ МэВ.}$$

II. 8.5. Цепь описывается уравнением

$$L \frac{di}{dt} + iR = V.$$

Его решение, удовлетворяющее начальному условию при $t = 0$, имеет вид

$$i = \frac{V}{R} (1 - e^{-(R/L)t}).$$

Стационарный ток в цепи равен V/R . Время t , в течение которого ток в цепи достигнет половины стационарного значения, находим из соотношения

$$0,5 = 1 - e^{-(R/L)t}.$$

Следовательно,

$$t = \frac{L}{R} \ln 2.$$

II.8.6. Из уравнения $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, записанного в виде

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = ky,$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = kx,$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0,$$

получаем два возможных решения для векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = (kxz, -kyz, 0) \quad \text{и} \quad \mathbf{A}' = \frac{k}{2}(-x^2 + y^2) \hat{\mathbf{k}},$$

которые связаны между собой соотношением калибровочной инвариантности

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \frac{k}{2} \nabla (x^2 z - y^2 z);$$

следовательно, потенциалы \mathbf{A} и \mathbf{A}' тождественны.

Из уравнения $\mathbf{B} = -\nabla \varphi$, записанного в виде

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ky, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = kx \quad \text{и} \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

находим выражение для скалярного потенциала φ ¹⁾:

$$\varphi = -kxy + C,$$

где C — константа.

II.9.1. Магнитная индукция на боковой поверхности пучка равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Вб/м}^2.$$

Следовательно, на электрон, движущийся вдоль границы пучка, действует сила

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Ее значение равно

$$F = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ Н.}$$

Сила направлена к оси пучка и стремится сжать его.

¹⁾ Потенциал φ можно ввести во всем пространстве, за исключением точек, расположенных на оси z . — Прим. ред.

II. 9.2. В случае среды, заполненной электронами, уравнения Максвелла для гармонических полей можно записать в виде

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= -i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c} \mathbf{E}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Исключая либо \mathbf{B} , либо \mathbf{E} в первом или третьем уравнениях системы (1), приходим к волновому уравнению

$$\left(\nabla^2 + \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0, \quad (2)$$

из которого следует соотношение

$$-k^2 + \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi\mu Ne^2}{mc^2} = 0; \quad (3)$$

здесь мы предположили, что \mathbf{E} и \mathbf{B} изменяются как $e^{-i\omega t+ikz}$. В случае $\mu = 1$ и $\epsilon = 1$ это соотношение принимает вид¹⁾

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad (4)$$

где

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}.$$

Частота ω_p называется плазменной частотой. Показатель преломления среды по определению равен

$$n = \frac{ck}{\omega}. \quad (5)$$

Из выражений (4) и (5) получаем

$$n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}.$$

При высоких частотах падающей волны, когда $\omega > \omega_p$, показатель преломления n является действительным, и волна свободно проходит через плазму. При частотах ниже плазменной, когда $\omega < \omega_p$, показатель преломления n становится чисто мнимым. От ионосферы такие волны отражаются.

II. 9.3. Найдем сначала эквивалентную емкость C данной системы. Так как конденсаторы C_2 и C_3 соединены последовательно, то

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

¹⁾ Автор фактически предполагает, что среда представляет собой разреженный газ и частота ω значительно превышает все резонансные частоты вещества. — Прим. ред.

где C_{23} — эквивалентная емкость этих двух конденсаторов. Поскольку конденсатор C_1 соединен с цепью (C_2, C_3) параллельно, то

$$C = C_{23} + C_1 = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} + C_1.$$

Электрическая энергия, запасенная в системе, равна

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \right) V^2 = \frac{(C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3) V^2}{2 (C_2 + C_3)}.$$

II. 9.4. 10^{-5} мм рт. ст.

II. 9.5.

а) В течение времени $0 \leq t \leq t_1$ скорость рамки совпадает со скоростью свободно падающего тела, т. е. $v = gt$. К моменту времени $t = t_1$ ее скорость достигает значения

$$v_1 = gt_1 = \sqrt{2gh}.$$

б) В интервале времени $t_1 \leq t \leq t_2$ наводимая в рамке

$$\mathcal{E.d.c.} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dA}{dt} = -BWv,$$

где A — площадь рамки в области $y < 0$. Через рамку протекает ток

$$I = -\frac{BW}{R} v \text{ (направлен по часовой стрелке).}$$

Сила, действующая на рамку со стороны магнитного поля,

$$F = BWI = -\frac{B^2 W^2}{R} v \text{ (направлена вверх).}$$

Уравнение движения рамки записывается в виде

$$m\dot{v} = mg - \frac{B^2 W^2}{R} v.$$

Отсюда находим

$$v = \frac{mgR}{B^2 W^2} + \left(gt_1 - \frac{mgR}{B^2 W^2} \right) e^{-\frac{B^2 W^2}{mR}(t-t_1)}. \quad (1)$$

в) При $t \geq t_2$ на рамку действует только сила тяжести. Следовательно, ее скорость равна

$$v = \frac{mgR}{B^2 W^2} + \left(gt_1 - \frac{mgR}{B^2 W^2} \right) e^{-\frac{B^2 W^2}{mR}(t_2-t_1)} + g(t-t_2).$$

г) При увеличении размеров рамки в N раз на ее изготовление уйдет в N раз больше провода. Она будет иметь ширину $W' = NW$, массу $m' = Nm$ и сопротивление $R' = NR$.

Из п. «а» следует

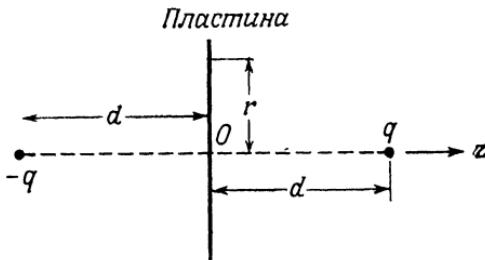
$$v' = v \text{ в интервале времени } 0 \leq t \leq t_1.$$

Подстановка R' , W' и m' вместо R , W и m оставляет прежним вид уравнения (1). Следовательно, в интервале времени $t_1 < t < t_2$

$$v' = \frac{mgR}{B^2 W^2} + \left(gt_1 - \frac{mgR}{B^2 W^2} \right) e^{-\frac{B' W^2}{m R} (t-t_1)} = v.$$

Таким образом, пропорциональное увеличение размеров рамки не изменяет ее движения.

II. 9.6.



Если поместить заряд противоположного знака $-q$ на оси z на расстоянии d за пластиной, как показано на рисунке, и убрать пластину, то потенциал обоих зарядов во всех точках плоскости $z = 0$, в том числе и на бесконечности, будет равен нулю. Таким образом, потенциал новой системы удовлетворяет всем граничным условиям старой системы и в то же время является решением уравнения Лапласа. Поскольку при данных граничных условиях решение этого уравнения единствено, то очевидно, что поле справа от пластины эквивалентно полю упомянутых двух зарядов. Следовательно, в области $z \geq 0$ мы имеем

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(z-d)^2 + r^2}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(z+d)^2 + r^2}}.$$

С помощью теоремы Гаусса можно получить выражение для поверхностной плотности заряда σ :

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0},$$

или

$$\sigma = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + r^2)^{1/2}}.$$

II. 9.7.

а) Полная энергия системы дается выражением

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot \text{Объем} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A x,$$

где $A = 1 \text{ м}^2$, $x = 0,01 \text{ м}$, $E = 10^5 \text{ В/м}$ и $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$. Если увеличить расстояние x между пластинами на dx , то энергия электрического поля изменится на

$$dW = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A dx.$$

Затраченная на это механическая работа Fdx должна быть равна изменению энергии dW . Следовательно,

$$F dx = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A dx,$$

откуда находим

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A = 0,5 \cdot 8,8 \cdot 10^{-12} \cdot (10^5)^2 \cdot 1 = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

б) С помощью теоремы Гаусса находим

$$\sigma = \epsilon_0 E = 8,8 \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 = 8,8 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2.$$

II. 10.1.

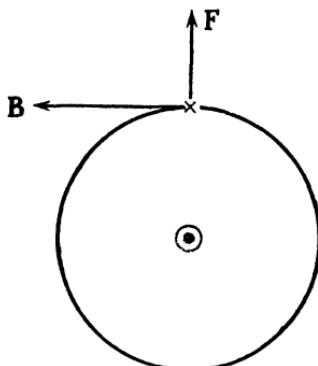
а) Медь — нормальный металл; при понижении температуры его проводимость увеличивается. Это происходит потому, что при понижении температуры энергия теплового движения электронов и атомов в металле уменьшается. Следовательно, число столкновений электронов между собой и электронов с атомами падает. Электрический ток при этом испытывает меньшее сопротивление, и проводимость увеличивается.

б) Ниобий — сверхпроводящий металл; его проводимость при температуре ниже критической температуры T_c становится бесконечной. Простое объяснение этого явления заключается в следующем. При температуре ниже критической электроны в ниобии оказываются связанными между собой посредством взаимодействия с фононами. В силу коллективного движения электронов столкновения между ними практически исключены. Поэтому в сверхпроводнике отсутствует ограничение тока в отличие от несверхпроводящего металла, где столкновения электронов играют решающую роль и вызывают переход электрической энергии в тепловую.

в) Германий — полупроводник. При очень низкой температуре большинство электронов занимает низшие энергетические уровни, и средняя энергия связи становится много больше энергии теплового движения ($3kT/2$). Количество электронов в зоне

проводимости уменьшается; следовательно, при низких температурах германий имеет плохую проводимость.

II. 10.2.

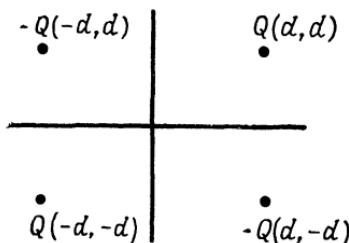


а) Решение аналогично решению задачи II. 7.1. Мы имеем

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{20}{10} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ Г.}$$

б) Как показано на рисунке, сила, действующая на внешний цилиндр, направлена по радиусу и стремится разорвать цилиндр. Здесь действует такое правило: система, подключенная к источнику (например, к батарее) стремится запастися максимум энергии и увеличить свою индуктивность (так как $W = L I^2 / 2$).

II. 10.3.



Как показано на рисунке, при рассмотрении поля в первом квадранте действие двух проводящих плоскостей можно заменить действием трех точечных зарядов. В этом квадранте электрический потенциал определяется формулой

$$V(x, y) = Q \left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + (y-d)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + (y+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + (y+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + (y-d)^2}} \right).$$

В остальной части пространства всюду $V(x, y) = 0$,

II. 10.4.

а) В соответствии с законом Ампера магнитное поле записывается в виде

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l}. \quad (1)$$

Подставляя сюда $N/l = 10\,000$ витков/м и $i = 100$ А, получаем

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10\,000 \cdot 100 = 4\pi \cdot 10^{-1} = 1,257 \text{ Вб/м}^2. \quad (2)$$

б) Магнитный поток, пронизывающий сечение сердечника, равен

$$\Phi = BA = 4\pi \cdot 10^{-1} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-4} = \pi^2 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}, \quad (3)$$

и индуктивность

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{10^4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{-5}}{10^2} = \pi^2 \cdot 10^{-3} \approx 10^{-2} \text{ Г.} \quad (4)$$

в) Электрическая энергия, затрачиваемая на создание магнитного поля, дается выражением

$$E = - \int_0^t \mathcal{E} i \, dt, \quad (5)$$

где э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E} = - L \frac{di}{dt}.$$

Подставляя ее в формулу (5), получаем

$$E = L \int_0^I i \, di = \frac{LI^2}{2} \approx 50 \text{ Дж}^1).$$

г) Энергия магнитного поля равна

$$E = \frac{B^2}{2\mu_0} Al = \frac{(4\pi \cdot 10^{-1})^2}{8\pi \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-4} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{2} \cdot 10 \approx 50 \text{ Дж.}$$

II. 10.5.

а) Начальные заряды на конденсаторах C_1 и C_2 равны соответственно C_1V и C_2V . После соединения конденсаторов на них остается общий заряд $Q = (C_1 - C_2)V$. Одна часть его

$$\frac{(C_1 - C_2)VC_1}{C_1 + C_2}$$

¹⁾ Не следует путать эту энергию с той, что отбирается от источника. Из-за различных потерь (тепловых, на излучение и др.) последняя оказывается всегда больше. Аналогичная ситуация имеет место при аккумулировании энергии электрического поля в конденсаторе. — Прим. перев.

сосредоточена на конденсаторе C_1 , другая

$$\frac{(C_1 - C_2) V C_2}{C_1 + C_2}$$

на конденсаторе C_2 .

б) Энергия конденсаторов до их соединения

$$E_0 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V^2.$$

После соединения конденсаторов

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} \frac{(C_1 - C_2)^2 V^2}{C_1 + C_2}.$$

Следовательно, потери энергии составляют

$$\Delta E = E_0 - E = \frac{V^2}{2(C_1 + C_2)} [(C_1 + C_2)^2 - (C_1 - C_2)^2] = \frac{2C_1 C_2}{C_1 + C_2} V^2.$$