

## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

### IV. 1.1.

а)  $\alpha$ -частицы обладают низкими энергиями, и размер ядра атома оказывается малым по сравнению с длиной волны де Броиля — Комптона для этих частиц. Следовательно, рассеяние частиц на ядрах является когерентным, причем сечение такого когерентного рассеяния на протонах пропорционально  $Z^2$ , где  $Z$  — число протонов в ядре. Рассеяние же  $\alpha$ -частиц на электронах является некогерентным, поскольку радиус электронной орбиты намного превышает длину волны де Броиля для этих частиц. Сечение рассеяния  $\alpha$ -частиц на электронах пропорционально  $Z$ . Отсюда видно, что рассеяние  $\alpha$ -частиц на ядрах преувеличивает над рассеянием их на электронах. Более того, энергетические потери  $\alpha$ -частиц при рассеянии на ядрах намного превышают их потери на ионизацию атома, поскольку энергия, передаваемая электрону при единичном акте рассеяния частицы на электроне, меньше  $2m_e v_\alpha^2$ . Наконец, угол рассеяния  $\alpha$ -частиц на ядрах значительно больше, чем на электронах. Именно по этим основным причинам пренебрегают влиянием атомных электронов.

б) Сечение комптоновского рассеяния обратно пропорционально квадрату массы рассеивающей частицы. Следовательно,

$$\frac{\text{Сечение фотон-электронного рассеяния}}{\text{Сечение фотон-ядерного рассеяния}} = \left( \frac{m_N}{m_e} \right)^2 \gg 1,$$

откуда видно, что влияние ядер на рассеяние рентгеновских лучей пренебрежимо мало.

IV. 1.2. Магнитное поле в центре петли с током  $i$  вычисляем по формуле

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a},$$

где  $a$  — радиус петли. Если электрон в атоме водорода находится в  $2p$ -состоянии, то радиус его орбиты  $a$  и скорость орбитального движения  $v$  равны<sup>1)</sup>

$$a = n^2 a_0 \quad \text{и} \quad v = a \frac{c}{n},$$

<sup>1)</sup> Оценка делается на основе модели атома Бора. — Прим. ред.

где  $a_0$  — боровский радиус электронной орбиты в атоме водорода,  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры,  $a = 2$ . Определяем ток  $i$ :

$$i = \frac{ev}{2\pi a} = \frac{eac}{2\pi n^3 a_0} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})(1/137)(3 \cdot 10^8)}{(2)(3,14)(8)(0,5 \cdot 10^{-10})} \approx 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ А.}$$

Следовательно,

$$B = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7})(1,4 \cdot 10^{-4})}{(2)(2 \cdot 10^{-10})} \approx 0,43 \text{ Вб/м}^2.$$

**IV.1.3.** В соответствии с классической волновой теорией относительное доплеровское уширение линии дается выражением

$$\frac{\Delta\omega_D}{\omega} \approx \frac{\sqrt{\langle V^2 \rangle}}{c}, \quad (1)$$

где в нашем случае  $\sqrt{\langle V^2 \rangle}$  — среднеквадратичная скорость атомов ртути, а

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 2\pi \frac{3,0 \cdot 10^8}{2,537 \cdot 10^{-7}} \approx 7,43 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

Согласно закону равнораспределения,

$$\frac{m}{2} \langle V^2 \rangle = \frac{kT}{2},$$

откуда

$$\sqrt{\langle V^2 \rangle} = \sqrt{\frac{kT}{m}} = c \sqrt{\frac{kT}{mc^2}} = c \sqrt{\frac{(1,38 \cdot 10^{-16})(3 \cdot 10^2)}{(202 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24})(9 \cdot 10^{20})}} \approx \\ \approx 3,7 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

Таким образом, из формулы (1) получаем

$$\Delta\omega_D = 3,7 \cdot 10^{-7} \omega = (3,7 \cdot 10^{-7})(7,42 \cdot 10^{15}) \approx 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Используя соотношение неопределенностей, находим естественную ширину спектральной линии

$$\Delta\omega_N = \frac{1}{\tau},$$

где  $\tau$  — среднее время перехода, ответственного за излучение. Для электрического дипольного перехода  $\tau \approx 10^{-8}$  с, так что

$$\Delta\omega_N \approx 10^8 \text{ с}^{-1} \ll \Delta\omega_D.$$

Полная энергия излучения за одну секунду на данной спектральной линии вычисляется по формуле

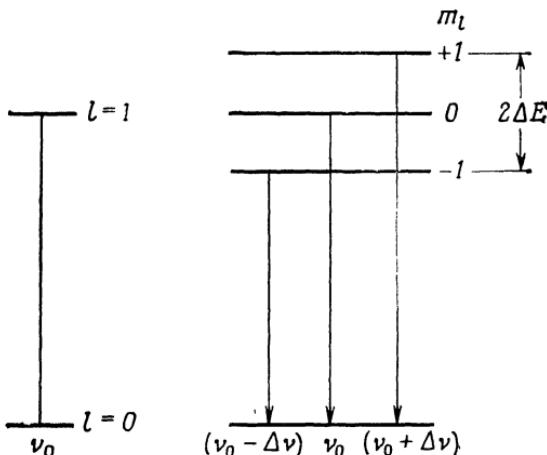
$$W = n\hbar\omega = n \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$$

( $n$  — число испускаемых фотонов в одну секунду). Таким образом, находим <sup>1)</sup>

$$W = 10^{18} \frac{1973}{400} = 5 \cdot 10^{18} \text{ эВ} \approx 1 \text{ Дж.}$$

#### IV. 1.4.

- a)  $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 4s^1$ .
- б)  $L = 0, S = \frac{1}{2}, J = \frac{1}{2}$ .
- в)



В случае нормального эффекта Зеемана мы должны рассматривать только то расщепление энергетического уровня, которое отвечает изменениям квантового числа  $m_l$ , соответствующего  $z$ -компоненте орбитального момента количества движения. Для основного состояния  $m_l = 0$ , а для первого возбужденного состояния ( $4p$ ) оно может принимать значения  $m_l = -1, 0$  и  $+1$ . На рисунке приведена диаграмма энергетических уровней и показаны разрешенные переходы. Сдвиг уровней  $\Delta E$  в магнитном поле  $B$  составляет

$$\Delta E = \pm \frac{e\hbar}{4\pi mc} B.$$

Согласно правилу отбора для разрешенных переходов с магнитных подуровней, имеем  $\Delta m_l = 0$  или  $\pm 1$ . Им соответствует излучение с энергией

$$\hbar\nu = \hbar\nu_0 + \frac{e\hbar}{4\pi mc} B, \quad \Delta m_l = +1,$$

$$\hbar\nu = \hbar\nu_0, \quad \Delta m_l = 0,$$

$$\hbar\nu = \hbar\nu_0 - \frac{e\hbar}{4\pi mc} B, \quad \Delta m_l = -1.$$

1) Здесь в числителе дроби стоит значение  $\hbar c$  в  $\text{эВ}\cdot\text{\AA}$ , а в знаменателе — длина волны в  $\text{\AA}$ , деленная на  $2\pi$ . — Прим. перев.

**IV. 1.5.**

а) Функция  $\psi$  должна быть нормированной. Из условия нормировки

$$\int_{-a}^{+a} \psi^2 dx = 1$$

получаем

$$C^2 \int_{-a}^{+a} \left[ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \frac{1}{16} \cos^2\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \right] dx = 1.$$

Здесь из подынтегрального выражения отброшены произведения с перекрестными членами, поскольку при интегрировании они дают нули. Что касается оставшихся членов, то мы имеем

$$2aC^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{32} \right) = 1,$$

откуда

$$C = 4 \sqrt{\frac{1}{33a}}.$$

б) Подставляя поочередно каждый член волновой функции  $\psi$  в уравнение Шредингера, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{4a^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) = \\ &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \equiv E_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right), \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{9\pi^2}{a^2} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \equiv E_2 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right), \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) &= \frac{9\hbar^2\pi^2}{8ma^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \equiv E_3 \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right), \end{aligned}$$

Можно показать, что все члены волновой функции описывают собственные состояния системы, а  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  являются собственными значениями энергий, соответствующими этим состояниям. Поскольку исходная волновая функция представляет собой линейную комбинацию трех собственных функций, то возможные результаты измерений энергии записываются следующим образом:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}, \quad E_2 = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad \text{и} \quad E_3 = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}.$$

Вероятность измерения каждого из этих значений пропорциональна квадрату веса соответствующего члена волновой функции, т. е.

$$P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 1 : \frac{1}{16},$$

а так как  $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ , получаем

$$P_1 = \frac{16}{33}, \quad P_2 = \frac{16}{33} \quad \text{и} \quad P_3 = \frac{1}{33}.$$

#### IV. 2.1.

а)  $m_n = 939,5 \text{ МэВ}/c^2$ , или  $1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ,

б)  $h = 6,626 \cdot 10^{-27} \text{ эрг}\cdot\text{с}$ ,

в)  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ ,

г)  $\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = \frac{2\pi\hbar c}{m_e c^2} = \frac{2\pi(1973)}{5 \cdot 10^5} \approx 0,0243 \text{ \AA}$ ,

д)  $r_0 = \frac{e}{m_e c^2} \approx 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ ,

е)  $10^{-9} \text{ с}$ ,

ж)  $\mu_p \approx \frac{2,7e\hbar}{2m_p c} \approx 8 \cdot 10^{-18} \text{ МэВ}/\text{Гс}$ ,

з)  $\tau = 10^3 \text{ с}$ , поскольку  $c\tau = 3,03 \cdot 10^{13} \text{ см}$ ,

и)  $v = \alpha c \approx 2,2 \cdot 10^8 \text{ см}/\text{с}$ .

#### IV. 2.2.

а) В стационарном уравнении Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

изменим знак координаты  $x$ . Тогда получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} + V(-x)\psi(-x) = E\psi(-x). \quad (2)$$

Считая  $V(x) = V(-x)$ , уравнение (2) можно переписать в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} + V(x)\psi(-x) = E\psi(-x). \quad (3)$$

Следовательно,  $\psi(-x)$  также является решением уравнения Шредингера, соответствующим тому же значению энергии  $E$ . Но из условия задачи известно, что решение уравнения должно быть невырожденным; поэтому  $\psi(x)$  и  $\psi(-x)$  должны быть линейно зависимыми. Если обе функции нормированы, то

$$\psi(x) = \pm \psi(-x); \quad (4)$$

здесь знак  $\pm$  означает, что решение может иметь либо положительную, либо отрицательную четность.

б) Заданное потенциальное поле  $V(x)$  удовлетворяет условию  $V(x) = V(-x)$ . Значит, как было показано в предыдущем

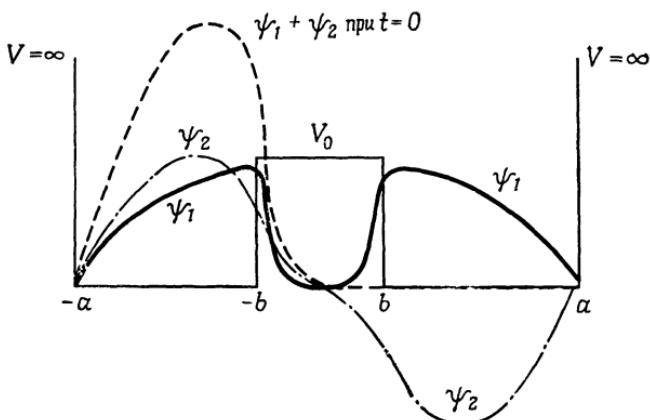
пункте, волновая функция имеет вполне определенную четность: либо  $\psi(x) = +\psi(-x)$ , либо  $\psi(x) = -\psi(-x)$ . Пусть

$$k_1 = \frac{n\pi}{2a} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mV_0 - k_1^2\hbar^2},$$

где  $n$  — целое число. Поскольку волновая функция должна обращаться в нуль при  $x = \pm a$ , то  $\psi(x)$  ведет себя в области  $-a < x < -b$  подобно функции  $\sin k_1(x+a)$ , а в области  $b < x < a$  — подобно функции  $\pm \sin k_1(a-x)$ . В областях же  $-b < x < 0$  и  $0 < x < b$  она изменяется экспоненциально как  $-k_2(b+x)$  и  $+(-)e^{-k_2(b-x)}$  соответственно<sup>1)</sup>. Знак  $+$  ( $-$ ) отвечает положительной (отрицательной) четности волновой функции. Основное состояние  $\psi_1$  системы имеет положительную четность (четно), а возбужденное состояние  $\psi_2$  — отрицательную четность (нечетно). Энергию системы в  $n$ -м состоянии можно вычислить по формуле

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

На рисунке построены волновые функции  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и  $(\psi_1 + \psi_2)$  в зависимости от  $x$  для момента времени  $t = 0$ .



в) Запишем волновой пакет в виде

$$\psi = \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}.$$

Поскольку в правой потенциальной яме функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  складываются в противофазе (т. е. гасят друг друга), в левой потенциальной яме складываются в фазе (т. е. усиливают друг друга), а в области  $-b < x < b$  они пренебрежимо малы, то в

<sup>1)</sup> Можно порекомендовать читателю найти более корректное решение этой задачи. — Прим. ред.

момент времени  $t = 0$  волновой пакет  $\psi$  почти полностью сосредоточен в левой потенциальной яме. С течением времени разность фаз между обеими составляющими волнового пакета изменяется как  $(E_2 - E_1)t/\hbar$ . Это означает, что волновой пакет постепенно перемещается в правую потенциальную яму, а затем возвращается обратно. Период таких колебаний равен

$$\frac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1}.$$

#### IV. 2.3.

а) Нижеложен уровень  ${}^1S_0$ , и вот почему. У позитрона направления магнитного и спинового моментов совпадают, а у электрона они противоположны друг другу. Из курса классической электродинамики нам известно, что система, состоящая из двух магнитных диполей, обладает минимальной потенциальной энергией, когда оба диполя ориентированы в одном направлении. Следовательно, в основном состоянии направления спинов позитрона и электрона противоположны.

б) Приведенная масса позитрона равна  $\mu = {}^1/{}_2m_e$ . Следовательно,

$\text{Энергия связи} = ({}^1/{}_2)$  ( $\text{Энергия связи в атоме водорода}) = = 6,8 \text{ эВ.}$

в)  $E_\gamma = [2m_e - (\text{Энергия связи})]/2 \approx 0,5 \text{ МэВ.}$  Согласно законам сохранения импульса и момента количества движения, оба  $\gamma$ -кванта разлетаются в противоположных направлениях с противоположно направленными моментами количества движения.

#### IV. 2.4.

а)

$$\begin{aligned} \langle l', m' | [L_+, L_-] | l, m \rangle &= \langle l', m' | [M_x + iM_y, M_x - iM_y] | l, m \rangle = \\ &= \langle l', m' | 2(iM_y M_x - iM_x M_y) | l, m \rangle = \langle l', m' | 2i[M_y, M_x] | l, m \rangle = \\ &= \langle l', m' | 2\hbar M_z | l, m \rangle = 2\hbar^2 m \delta(l - l') \delta(m - m'). \end{aligned}$$

б) Если  $x$  — некоторый оператор (матрица), то функции от этого оператора  $e^{ix}$ ,  $\cos x$  и  $\sin x$  определяются с помощью формальных разложений в соответствующие ряды. Следовательно, мы можем написать ряд

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_y \theta/2} &= 1 + \left( i\sigma_y \frac{\theta}{2} \right) + \frac{(i\sigma_y \theta/2)^2}{2!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{(\sigma_y \theta/2)^2}{2!} + \frac{(\sigma_y \theta/2)^4}{4!} - \dots + \\ &\quad + i \left[ \left( \sigma_y \frac{\theta}{2} \right) - \frac{(\sigma_y \theta/2)^3}{3!} + \frac{(\sigma_y \theta/2)^5}{5!} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что  $\sigma_y^2 = 1$ , получаем

$$e^{i\sigma_y \theta/2} = 1 - \frac{(\theta/2)^2}{2!} + \frac{(\theta/2)^4}{4!} - \dots + \\ + i\sigma_y \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{(\theta/2)^3}{3!} + \frac{(\theta/2)^5}{5!} - \dots \right] = \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_y \sin \frac{\theta}{2}.$$

**IV. 2.5.** Электрический потенциал внутри однородно заряженной сферы постоянен и равен  $V = e/a$ . Соответствующий потенциал точечного заряда изменяется как  $e/r$ . Определяем искомый сдвиг энергетического уровня:

$$\Delta E = \int \psi^* \left( \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{a} \right) \psi r^2 dr d\Omega = \left( \frac{1}{a_0} \right)^3 4 \int_0^a e^{-2r/a_0} \left( \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{a} \right) r^2 dr \approx \\ \approx \frac{2e^2 a^2}{3a_0^3} = \frac{4}{3} \frac{e^2}{2a_0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{4}{3} (13,6 \text{ эВ}) \left( \frac{10^{-13}}{0,5 \cdot 10^{-8}} \right)^2 \approx 7 \cdot 10^{-9} \text{ эВ.}$$

Отсюда мы видим, что энергетический уровень поднимется. Следовательно, энергия связи уменьшится.

**IV. 3.1.** Устойчивость ядра зависит от величины отношения  $r$ , определяемого выражением <sup>1)</sup>

$$r = \frac{\text{Энергия кулоновского взаимодействия}}{\text{Поверхностная энергия ядра}}.$$

Поскольку радиус ядра  $\sim A^{1/3}$ , а площадь его поверхности  $\sim A^{2/3}$ , то

$$r \sim \frac{Z^2 e^2 / A^{1/3}}{A^{2/3}},$$

или

$$r = \text{const} \cdot \frac{Z^2 e^2}{A}.$$

При малых значениях  $r$  ядро устойчиво. Оно распадается при  $r > r_0$ , где  $r_0$  — критическое значение  $r$ , соответствующее ядру с  $Z = Z_0 \approx 80$  и  $A = A_0 \approx 200$ . Для устойчивого ядра с удвоенным зарядом должно выполняться соотношение

$$r_0 \equiv \text{const} \cdot \frac{Z_0^2 e^2}{A_0} \geq \text{const} \cdot \frac{Z^2 (2e)^2}{A} \equiv \text{const} \cdot \frac{4Z^2 e^2}{A}.$$

Отсюда находим

$$\frac{4Z^2}{A} \leq \frac{Z_0^2}{A_0} \approx \frac{(80)^2}{200} = 32,$$

<sup>1)</sup> Приводимый автором критерий устойчивости не является полным. — *Прим. ред.*

а так как

$$\frac{4Z^2}{A} \approx \frac{4Z^2}{2Z} = 2Z,$$

то получаем  $2Z \leq 32$ , или  $Z \leq 16$ . Наиболее тяжелому устойчивому ядру соответствовало бы  $Z \approx 16$  и  $A \approx 32$ .

**IV. 3.2.** Эффект Пашена — Бака проявляется при увеличении магнитного поля  $B$  до таких значений, когда энергия  $\mu_{\text{яд}}B$  становится сравнимой с величиной сверхтонкого расщепления энергетических уровней, имеющей порядок  $10^{-6}$  эВ. Отсюда следует, что

$$B = \frac{10^{-6}}{\mu_{\text{яд}}} = \frac{10^{-6}}{3 \cdot 10^{-12}} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ Гс.}$$

**IV. 3.3.** Кинетическая энергия равна  $m_n c^2 + m_n c^2 = 2m_n c^2$ .

**IV. 3.4.** Боровский радиус орбиты мюона пропорционален  $1/Z$ ; число же протонов в ядре пропорционально  $Z$ . Следовательно, вероятность <sup>1)</sup> того, что мюон попадет в объем, занимаемый ядром, пропорциональна  $Z^4$ .

**IV. 3.5.** До значений энергии  $E_p$ , не превышающих 10 МэВ, при которых дебройлевская длина волны протона еще достаточно велика по сравнению с  $\hbar/m_\pi c$ , где  $m_\pi$  — масса пиона ( $J^P = 0^-$ ).

**IV. 3.6.** Данная задача аналогична задаче о линейном гармоническом осцилляторе. Потенциал, заданный в области  $x > 0$ , совпадает с потенциалом для гармонического осциллятора. Следовательно, уравнение Шредингера должно записываться аналогичным образом:

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2\psi = 0, \quad x > 0.$$

Однако граничное условие в нашем случае имеет вид

$$\psi_n(x=0) = 0.$$

В случае линейного гармонического осциллятора четным значениям  $n$  соответствуют четные волновые функции. При  $x = 0$  эти волновые функции отличны от нуля и, следовательно, не удовлетворяют записанному выше граничному условию. Нечетным зна-

<sup>1)</sup> Амплитуда вероятности захвата пропорциональна отношению объема ядра (который пропорционален  $Z$ ) к размерам области, в которой может находиться мюон (этот размер порядка радиуса боровской орбиты, т. е.  $\sim 1/Z$ ). Вероятность (т. е. квадрат модуля амплитуды) оказывается поэтому пропорциональной  $Z^4$ . — Прим. ред.

чениям  $n$  отвечают нечетные волновые функции относительно  $x$ . Поэтому

$$\Psi_{2m+1}(x=0) \equiv 0;$$

здесь  $m$  — любое положительное целое число. Отсюда мы видим, что функции

$$\Psi_{2m+1}(x)$$

удовлетворяют уравнению Шредингера и заданному граничному условию и их можно считать допустимыми решениями. Им соответствуют собственные значения энергии

$$E_{2m+1} = \left(2m + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

**IV. 3.7.** Ниже перечислены точные симметрии и законы сохранения:

- 1) комбинированная четность  $CPT = 1$ ,
- 2) преобразования Лоренца,
- 3) закон сохранения вероятности (унитарность),
- 4) закон сохранения числа фермионов,
- 5) законы сохранения импульса, энергии и момента количества движения,
- 6) законы сохранения барионного и лептонного зарядов,
- 7) закон сохранения заряда.

Неуниверсальное сохранение имеет место для

- 1) четности,
- 2) зарядового сопряжения,
- 3) обращения времени,
- 4) зарядовой независимости ядерных сил,
- 5)  $G$ -четности,
- 6) странности,

и т. д.

**IV. 3.8.** Запишем отнесенную к единице времени вероятность распада частицы в момент  $t$  в дифференциальной форме

$$dP(t) \sim - \left( \frac{dt}{t_1} + \frac{dt}{t_2} \right) = - \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} dt.$$

Отсюда определяем вероятность того, что к моменту времени  $t$  мезон еще существует:

$$P(t) \sim \exp \left( - \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} t \right).$$

Таким образом, среднее время жизни частицы равно

$$\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Согласно принципу неопределенности для энергии  $E$  имеем

$$\Delta E = \frac{\hbar(t_1 + t_2)}{t_1 t_2}.$$

Следовательно, неопределенность массы частицы

$$\Delta m = \frac{\hbar(t_1 + t_2)}{t_1 t_2 c^2}.$$

**IV.3.9.** Групповая скорость  $= \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = V$ .

Фазовая скорость  $= \lambda v = \frac{\hbar}{mV} v = \frac{E}{mV} = \frac{c^2}{V}$ .

### IV. 3.10.

а) Для  $1s$ -состояния волновая функция обращается в нуль только на бесконечности.

б) Для  $2s$ -состояния она обращается в нуль как при  $r = 2a_0$ , так и при  $r = \infty$ .

в) Для  $2p$ -состояния ( $m = \pm 1$ ) волновая функция равна нулю при  $\theta = 0, \pi$  и  $r = 0, \infty$ . Для  $2p$ -состояния ( $m = 0$ ) она равна нулю при  $\theta = \pi/2, 3\pi/2$  и при  $r = \theta, \infty$ . (Здесь  $m$  — магнитное квантовое число,  $\theta$  — сферическая координата, дополняющая широту.)

### IV.3.11. Энергия связи дается формулой

$$\epsilon = \frac{2\pi^2 m_e e^4 Z^2}{h^2}.$$

а) При учете релятивистской поправки масса электрона окажется больше. Следовательно, энергия связи увеличится (а энергетический уровень опустится).

б) Экранировка уменьшает поле ядра, или эффективное значение  $Z$ ; следовательно, станет меньше и энергия связи.

в) Если распределение заряда в ядре считать однородным и сферически симметричным, то потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром будет такая же, как и для электрона на определенной орбите в боровской модели. Однако, согласно квантовомеханическим представлениям, имеется некоторая конечная вероятность попадания этого электрона внутрь ядра атома. Отсюда следует, что учет конечного размера ядра атома приводит к уменьшению энергии связи. (См. задачу IV.2.5.)

### IV.3.12.

а) Только гравитационное взаимодействие<sup>1)</sup>, потенциал которого  $V \sim -1/r$ .

<sup>1)</sup> Автор имеет в виду такие большие расстояния  $r$ , на которых все «атомные» силы (например, силы Ван-дер-Ваальса) можно считать пренебрежимо малыми. — Прим. ред.

- б) Кулоновское взаимодействие:  $V \sim 1/r$ .  
 в) В поле иона нейтральный атом ведет себя подобно электрическому диполю. В этом случае  $V \sim -1/r^2$ .  
 г) Ядерное взаимодействие, характеризуемое потенциалом  $-e^{-kr}/r$ .

д) Нейтроны — нейтральные частицы, не обладающие электрической поляризацией. Поэтому здесь нужно учесть только взаимодействие их магнитных моментов. Рассматривая нейтроны как два магнитных диполя, получаем следующий вклад в потенциальную энергию взаимодействия:  $-2d_1 d_2 / r^3$ , где  $d_1 = d_2 = d$  ( $d$  — магнитный момент нейтрона).

**IV. 3.13.** Полную волновую функцию системы можно записать в виде произведения радиальной функции  $R(r)$  и угловой функции  $\psi(\theta, \varphi)$ :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \psi(\theta, \varphi).$$

В свою очередь функцию  $\psi(\theta, \varphi)$  можно представить как суперпозицию собственных функций оператора момента импульса системы:

$$\psi(\theta, \varphi) = \sum_{l, m} a_{l, m} Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Здесь  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  — общеизвестные сферические функции с целочисленными индексами  $l$  и  $m$ , причем  $0 \leq m \leq l$ . Функция  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  характеризует состояние системы с собственным значением модуля момента импульса  $\hbar \sqrt{l(l+1)}$ . Квадраты всех этих функций

$$|Y_l^m(\theta, \varphi)|^2, \text{ за исключением } |Y_0^0(\theta, \varphi)|^2,$$

зависят от угла  $\theta$ ; то же самое относится и к перекрестным произведениям<sup>1</sup>). Таким образом, единственной функцией, которая удовлетворяет условию независимости

$$|\psi(\theta, \varphi)|^2$$

<sup>1)</sup> Если сумма определенного числа произведений с перекрестными членами не зависит от  $\theta$  и  $\varphi$ , т. е.

$$\sum_{i, j} a_{ij} \left[ \Psi_l^m(\theta, \varphi) \right]^* \Psi_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) = \text{const} = A,$$

то, интегрируя по всему угловому пространству и используя условие ортогональности

$$\int \Psi_l^m(\theta, \varphi) \Psi_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) d\Omega = 0 \text{ для } l \neq l' \text{ или } m \neq m',$$

мы находим, что  $4\pi A = 0$ . Таким образом, произведения с перекрестными членами обращаются в нуль.

от углов  $\theta$  и  $\varphi$ , является

$$\psi(\theta, \varphi) \equiv Y_0^0(\theta, \varphi);$$

следовательно,  $l = m = 0$ . Это означает, что единственное возможное значение момента импульса системы равно нулю, т. е. система должна находиться в  $S$ -состоянии.

**IV. 4.1.** Одномерное уравнение Шредингера записывается в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = (E - V) \psi. \quad (1)$$

Если частицы расположены слева от барьера, то  $V = 0$ , и уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi.$$

Общее решение этого уравнения дается функцией

$$\psi_L = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}, \quad (2)$$

где

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Для частиц, находящихся в центральной части, имеем  $V = V_0$ , причем  $V_0 > E$ . Соответствующее решение уравнения Шредингера для этой области записывается как

$$\psi_M = C e^{k_2 x} + D e^{-k_2 x}, \quad (3)$$

где

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

Наконец, для частиц, находящихся справа от выступа потенциального барьера,  $V = V_1 < E$ . Здесь, поскольку мы рассматриваем волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ , решение уравнения (1) будет следующим:

$$\psi_R = F e^{ik_3 x}, \quad (4)$$

где

$$k_3 = \frac{\sqrt{2m(E - V_1)}}{\hbar}.$$

Запишем теперь граничные условия

$$A e^{-ik_1 d/2} + B e^{ik_1 d/2} = C e^{-k_2 d/2} + D e^{k_2 d/2}, \quad (5)$$

$$i k_1 A e^{-ik_1 d/2} - i k_1 B e^{ik_1 d/2} = k_2 C e^{-k_2 d/2} - k_2 D e^{k_2 d/2}, \quad (6)$$

$$F e^{ik_3 d/2} = C e^{k_2 d/2} + D e^{-k_2 d/2}, \quad (7)$$

$$i k_3 F e^{ik_3 d/2} = k_2 C e^{k_2 d/2} - k_2 D e^{-k_2 d/2}. \quad (8)$$

Из условий (5) и (6) получаем

$$2ik_1 A e^{-ik_1 d/2} = (ik_1 + k_2) C e^{-k_2 d/2} + (ik_1 - k_2) D e^{k_2 d/2}, \quad (9)$$

а из условий (7) и (8) —

$$(k_2 + ik_3) F e^{ik_3 d/2} = 2k_2 C e^{k_2 d/2} \quad (10)$$

и

$$(k_2 - ik_3) F e^{ik_3 d/2} = 2k_2 D e^{-k_2 d/2}. \quad (11)$$

Путем исключения из уравнений (9), (10) и (11) коэффициентов  $C$  и  $D$  находим

$$\frac{2ik_1 A e^{-ik_1 d/2}}{F e^{ik_3 d/2}} = \frac{(ik_1 + k_2) e^{-k_2 d} (k_2 + ik_3)}{2k_2} + \frac{(ik_1 - k_2) e^{k_2 d} (k_2 - ik_3)}{2k_2},$$

откуда получаем следующее выражение для коэффициента прозрачности барьера:

$$\begin{aligned} \frac{k_3 |F|^2}{k_1 |A|^2} &= \frac{16k_1 k_2^2 k_3}{(k_2^2 - k_1 k_3)^2 (e^{-k_2 d} - e^{k_2 d})^2 + (k_1 k_2 + k_2 k_3)^2 (e^{-k_2 d} + e^{k_2 d})^2} = \\ &= \frac{\sqrt[4]{E} (V_0 - E) \sqrt{E - V_1}}{[(V_0 - E) - \sqrt{E(E - V_1)}]^2 \operatorname{sh}^2 k_2 d + (V_0 - E) (\sqrt{E} - \sqrt{E - V_1})^2 \operatorname{ch}^2 k_2 d}. \end{aligned}$$

#### IV. 4.2. Нам дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти собственные значения матрицы, нужно решить характеристическое уравнение

$$|A - \lambda I| = 0, \quad (1)$$

которое в нашем случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Отсюда следует

$$(3 - \lambda)\lambda + 4 = 0,$$

или

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0. \quad (3)$$

Следовательно, собственными значениями матрицы  $A$  являются  $\lambda = 4$  и  $\lambda = -1$ . Пусть  $\lambda = 4$ . Согласно определению собственного вектора, имеем

$$\begin{pmatrix} 3 - 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (4)$$

Отсюда следует

$$-x_1 + 2x_2 = 0, \quad \text{или} \quad x_1 = 2x_2; \quad (5)$$

при этом компоненты вектора должны удовлетворять условию нормировки

$$x_1^2 + x_2^2 = 1. \quad (6)$$

Таким образом, собственному значению  $\lambda = 4$  соответствует собственный вектор

$$\begin{Bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{Bmatrix}.$$

Для  $\lambda = -1$  имеем

$$\begin{pmatrix} 3+1 & 2 \\ 2 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (7)$$

откуда

$$4y_1 + 2y_2 = 0, \quad \text{или} \quad y_1 = -\frac{1}{2}y_2, \quad (8)$$

и

$$y_1^2 + y_2^2 = 1. \quad (9)$$

В результате получаем собственный вектор

$$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{Bmatrix},$$

соответствующий собственному значению  $\lambda = -1$ .

#### IV.4.3.

а) **С** — вектор, характеризующий плотность потока вероятности. Его аналогом в классической электродинамике является вектор Пойнтинга.

б)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \psi^* \psi dV &= \int_V \left( \psi^* \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\psi^*}{dt} \psi \right) dV = \frac{i\hbar}{2m} \int_V [\psi^* \nabla^2 \psi - (\nabla^2 \psi^*) \psi] dV = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_V \operatorname{div} [\psi^* \operatorname{grad} \psi - (\operatorname{grad} \psi^*) \psi] dV = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{C}) dV. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{C} = \frac{\hbar}{2im} [\psi^* \operatorname{grad} \psi - (\operatorname{grad} \psi^*) \psi].$$

**IV. 4.4.**

а) Волновая функция, отвечающая основному состоянию атома водорода, имеет вид

$$\psi_0 = 2 \left( \frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp \left( - \frac{r}{a_0} \right),$$

где  $a_0 = 0,5 \text{ \AA}$ .

б) Вероятность нахождения электрона в слое между  $r$  и  $r + dr$  вычисляется по формуле

$$P(r) dr = |\psi_0|^2 dV, \quad \text{где } dV = 4\pi r^2 dr.$$

Подставляя сюда выражение для волновой функции  $\psi_0$ , получаем

$$P(r) dr = \left[ 2 \left( \frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{r}{a_0} \right) \right]^2 r^2 dr. \quad (1)$$

в) При максимальном значении  $P(r)$  производная  $dP(r)/dr$  обращается в нуль. Следовательно, для нашего случая имеем

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 \exp \left( - \frac{2r}{a_0} \right) \right] = 0,$$

или

$$2r - \frac{2r^2}{a_0} = 0. \quad (2)$$

Отсюда следует, что  $P(r)$  принимает максимальное значение при  $r = a_0$ . Второе решение уравнения (2),  $r = 0$ , соответствует минимальному значению  $P(r)$ , равному нулю.

**IV. 4.5.**

а)  $R \approx \frac{2\hbar^2}{me^2} \approx 1 \text{ \AA}$ .

б) Из известного соотношения  $\lambda_{\max} T = 0,29 \text{ K}\cdot\text{см}$  находим, что при  $T = 3 \text{ K}$

$$\lambda \approx 10^{-1} \text{ см} = 10^7 \text{ \AA}.$$

в) Ширина запрещенной зоны  $\approx 1,1 \text{ эВ}$ .

г) При делении одного ядра освобождается энергия, примерно равная 200 МэВ. Она соответствует разности энергий связи в исходном и конечных ядрах.

д)

$$f = \frac{c}{\lambda} \approx \frac{3 \cdot 10^{10}}{7 \cdot 10^{-5}} \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ Гц.}$$

е)

$$t = \frac{d}{c} = \frac{3 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^{10}} = 10^{-23} \text{ с.}$$

ж)

$$\mu_e = 0,9 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Гс.}$$

**IV. 4.6.** Основному состоянию частицы, находящейся между двумя непроницаемыми стенками, соответствует нормированная волновая функция вида

$$u^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{\pi x}{a},$$

где  $a$  — расстояние между стенками. Эта функция обращается в нуль при  $x = -a/2$  и  $x = a/2$ .

а) Собственные функции состояний частицы в расширенном потенциальном барьере записываются в виде

$$v^n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad \text{для нечетных } n$$

и

$$v^n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} \quad \text{для четных } n \text{ (исключая } n=0),$$

которые обращаются в нуль при  $x = a$  и  $x = -a$ . Функцию  $u^0(x)$  можно разложить в ряд по ортонормированным собственным функциям  $v^n$ :

$$u^0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v^n(x),$$

где

$$a_n = \int_{-a/2}^{+a/2} u^0(x) v^n(x) dx$$

— амплитуда вероятности нахождения частицы в состоянии  $n$ . Вычисляем эту вероятность для основного состояния:

$$\begin{aligned} P = a_0^2 &= \left[ \int_{-a/2}^{+a/2} \sqrt{\frac{2}{a}} \left( \cos \frac{\pi x}{a} \right) \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \cos \frac{\pi x}{2a} \right) dx \right]^2 = \\ &= \frac{2}{a^2} \left( \int_{-a/2}^{+a/2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{2a} dx \right)^2 = \frac{64}{9\pi^2}. \end{aligned}$$

б) Энергия частицы сохраняется в статистическом смысле, т. е. энергия частицы в исходном состоянии  $E(u^0)$  равна сумме энергий  $E_i$  всех возможных состояний  $v^i$ , взятых с весом  $P_i$ , который равен вероятности пребывания частицы в каждом из этих состояний:

$$E(u^0) = \sum_i E_i (v^i) P_i.$$

(См. задачу IV. 1.5.)

**IV. 5.1.**

а) Принцип соответствия: классическая механика является предельным случаем квантовой механики, когда постоянная Планка оказывается пренебрежимо малой относительно некоторого характерного параметра системы, например момента импульса. В этом случае все законы и предположения квантовой механики должны сводиться к классическим.

б) Закон Дюлонга и Пти утверждает, что молярная теплоемкость любого металла равна  $3R$ , или 6 кал/моль·К<sup>1)</sup>.

в) Потому что первоначально каждый атом калия находится в основном, или  $S$ -состоянии, и при переходе любого из них в возбужденное  $3S$ -состояние происходит поглощение только того фотона, длина волны которого соответствует главной серии.

г) Фактор  $g$  равен 2 для спинового момента электрона и 1 для орбитального момента.

д) Комптоновское рассеяние и фотоэффект.

**IV. 5.2.**

а) В случае системы, образуемой протоном и электроном, испускаемый фотон обладает энергией

$$\epsilon_e = 13,6 \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{n^2} \right) = 10,2 \text{ эВ, поскольку } n = 2.$$

Энергии уровней пропорциональны массе  $m$ , и она у мюона в 210 раз превышает массу электрона. Следовательно<sup>2)</sup>,

$$\epsilon_\mu \approx 2100 \text{ эВ.}$$

б) Радиус первой боровской орбиты обратно пропорционален массе  $m$ . Поскольку для электрона он равен  $a_0 = 0,5 \text{ \AA}$ , то для мюона получаем следующее значение:

$$a_\mu = 0,5 \cdot \frac{1}{210} \approx 0,0024 \text{ \AA}.$$

в) Скорость частицы на  $n$ -й боровской орбите  $v = a_n \omega_n$  не зависит от массы частицы, потому что  $a_n$  обратно пропорционально  $m$ , а  $\omega_n$  пропорционально ей. Следовательно,

$$v = \frac{e^2}{n \hbar} = \frac{\alpha c}{n};$$

здесь  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры.

**IV. 5.3.** Из известного соотношения  $\lambda_{\max} T = 0,29 \text{ см}\cdot\text{К}$  находим, что максимум спектральной плотности излучения при температуре  $T = 2000 \text{ К}$  приходится на длину волны  $\lambda_{\max} =$

<sup>1)</sup> Этот закон справедлив при достаточно высоких температурах. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Здесь не учитывается содвижение ядра. — *Прим. ред.*

$= 1,45 \cdot 10^{-4}$  см  $= 1,45 \cdot 10^4$  Å. Фотоны с этой длиной волны обладают энергией  $\approx 1$  эВ, что вдвое меньше энергии фотонов в желтой линии натрия (2,07 эВ).

Чтобы разрешить противоречие, нужно рассмотреть спектральное распределение энергии теплового излучения

$$I(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{1,44 \cdot 10^8 / \lambda T} - 1} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{7 \cdot 22 \cdot 10^4 / \lambda} - 1}.$$

Здесь подставлены числовые значения второй радиационной постоянной  $c_2 = 1,44 \cdot 10^{-2}$  м·К  $= 1,44 \cdot 10^8$  Å·К и температуры  $T = 2000$  К. На длине волны  $\lambda = 5890$  Å имеем

$$I(5890 \text{ Å}) \approx \frac{c_1}{(5890)^5} \frac{1}{e^{12,3} - 1}.$$

По сравнению с  $I(14500 \text{ Å})$  это очень малая величина. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{I(5890 \text{ Å})}{I(14500 \text{ Å})} &= \left( \frac{14500}{5890} \right)^5 \frac{e^{4,98} - 1}{e^{12,3} - 1} \approx (2,46)^5 \frac{1,44 \cdot 10^2}{2,20 \cdot 10^5} \approx \\ &\approx (88,6)(6,54 \cdot 10^{-4}) \approx 0,058. \end{aligned}$$

В то же время она больше, чем  $I(\lambda < 5890 \text{ Å})$ . Поскольку все атомы натрия находятся в основном состоянии  $3^2S_{1/2}$ , то ближайшим разрешенным возбужденным состоянием является  $3^2P_{1/2, 3/2}$ . Переходам

$$3^2P_{1/2, 3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$$

соответствует излучение линии 5890 Å. Для электрических дипольных переходов  $\Delta L = \pm 1$ , поэтому следующим близким возбужденным состоянием является  $4p$ , переход с которого отвечает излучению с  $\lambda = 3300$  Å. Однако этим переходом можно пренебречь, поскольку  $I(3300 \text{ Å}) \ll I(5890 \text{ Å})$ <sup>1)</sup>.

Мы приходим к выводу, что при такой низкой температуре наблюдается в основном только желтая линия.

**IV. 5.4.** Запишем уравнение Шредингера. Для области  $x \leq 0$  оно имеет вид

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + E\psi_1 = 0, \quad (1)$$

а для области  $x > 0$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + (E - V_0)\psi_2 = 0. \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Очевидно, что физиологическое восприятие рассматриваемого явления не изменилось бы и при противоположном неравенстве: излучение с  $\lambda = 3300$  Å лежит вне области спектральной чувствительности человеческого глаза. — Прим. перев.

а) Уравнения (1) и (2) имеют следующие решения:

$$\psi_1 = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad x \leq 0, \quad (3)$$

$$\psi_2 = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}, \quad x > 0, \quad (4)$$

где

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}.$$

Если частицы движутся слева направо, то  $D = 0$ . Для сшивания решений воспользуемся граничными условиями

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad \text{и} \quad \frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx}. \quad (5)$$

Они дают

$$A + B = C$$

и

$$k_1(A - B) = k_2C.$$

Отсюда находим

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A \quad (6)$$

и

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A. \quad (7)$$

Из выражений (3), (4), (6) и (7) получаем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A \left( e^{ik_1x} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-ik_1x} \right), \\ \psi_2 &= A \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{ik_2x}. \end{aligned} \quad (8)$$

б) Если частицы движутся к барьеру со скоростью  $v = \sqrt{2E/m}$ , то в ящике с единичным сечением и длиной  $l = v$  будет находиться только одна частица. Плотность частиц, движущихся к барьеру, равна  $A^2$ . Следовательно, мы имеем следующее условие нормировки:

$$A^2v = 1,$$

откуда находим

$$A = \left( \frac{m}{2E} \right)^{1/4}. \quad (9)$$

в) В случае  $E < V_0$  имеем

$$k_2 = i \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \equiv ik_3.$$

Таким образом, волновые функции (8) принимают вид

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A \left( e^{ik_1 x} + \frac{k_1 - ik_3}{k_1 + ik_3} e^{-ik_1 x} \right), \\ \psi_2 &= 2A \frac{k_1}{k_1 + ik_3} e^{-k_3 x}.\end{aligned}\quad (10)$$

Частицы не могут полностью преодолеть потенциальный барьер и отражаются от него обратно. Характеристическое расстояние, на которое проникают частицы в глубь барьера ( $x > 0$ ), равно

$$\frac{1}{k_3} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}.$$

**IV. 5.5.** Подставим заданную волновую функцию в уравнение Шредингера, записанное в сферической системе координат:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi_k}{dr} \right) + V(r) \psi_k = E \psi_k. \quad (1)$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi_k + V(r) \psi_k = E \psi_k. \quad (2)$$

Функция  $V(r)$  оказывается постоянной, и ее можно положить равной нулю. Из уравнения (2) мы видим, что

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Следовательно, частица является свободной.

#### IV. 6.1.

а) Формула для потока вероятности имеет вид

$$J = -\frac{i\hbar}{2m} \int_S [\psi^* \operatorname{grad} \psi - (\operatorname{grad} \psi^*) \psi] dA.$$

(Ее вывод дан в решении задачи IV. 4.3.)

б) Подставляя  $\psi = e^{ikx}$  и  $\psi^* = e^{-ikx}$  в приведенную выше формулу, мы получаем

$$J_x = -\frac{i\hbar}{2m} \int_S [e^{-ikx} (ik) e^{ikx} - (-ik) e^{-ikx} e^{ikx}] dA_x = \frac{\hbar k}{m} \int_S dA_x;$$

здесь  $\frac{\hbar k}{m}$  — скорость распространения волны.

в) Нет. Поток, соответствующий действительной волновой функции тождественно равен нулю.

**IV. 6.2.** При свободном падении тела в поле силы тяжести имеем

$$s = \Delta x + v_x t.$$

Здесь  $s$  — расстояние между шариком и отвесом,  $\Delta x$  — начальное смещение шарика,  $v_x$  — горизонтальная составляющая его скорости, равная  $\Delta p_x/m$ . Применяя соотношение неопределенностей

$$\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{\Delta x},$$

получаем

$$s = \Delta x + \frac{\Delta p_x}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx \Delta x + \frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{1}{\Delta x}. \quad (1)$$

Минимальному значению  $s$  соответствует условие

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = 1 + \frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} \left[ -\frac{1}{(\Delta x)^2} \right] = 0,$$

или

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\hbar^2 H}{m^2 g}}.$$

Отсюда находим:

$$\Delta x = \left( \frac{2\hbar^2 H}{m^2 g} \right)^{1/4}.$$

Следовательно,

$$s \approx 2 \left( \frac{2\hbar^2 H}{m^2 g} \right)^{1/4}.$$

### IV. 6.3.

а) Сравнивая формулы

$$\sqrt{v} = aZ - b$$

и

$$\hbar v = E_f - E_i = (Z-1)^2 R c h \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{2\pi^2 m e^4 (Z-1)^2}{h^2} \frac{3}{4},$$

получаем

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{3Rc} = \frac{\pi e^2}{2h} \sqrt{\frac{6m}{h}},$$

где  $R$  — постоянная Ридберга.

б) В атоме с большим атомным номером  $Z$  все электроны, за исключением  $1s$ -электронов, удалены от ядра на довольно большое расстояние. Поэтому на положение энергетических уровней  $1s$ -электронов остальные электроны не оказывают влияния. Считая, что

$$E(1s) \sim (Z-1)^2,$$

а

$$E(2p) \sim (1/2^2)(Z-1)^2,$$

получаем

$$v = \frac{E(2p) - E(1s)}{\hbar} \sim (Z-1)^2,$$

т. е. частный случай закона Мозли.

При анализе оптических спектров пренебрегать влиянием остальных электронов уже нельзя, поскольку именно они определяют уровни оптических переходов.

**IV. 6.4.** Направим ось  $x$  вдоль направления движения первой частицы. Тогда компоненты 4-импульсов обеих частиц записываются в виде

$$P_1 = (\gamma_1 m_1 v_1, 0, 0, i\gamma_1 m_1 c),$$

$$P_2 = (0, 0, 0, im_2 c),$$

где

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Определяем массу покоя образовавшейся частицы:

$$M = \left[ - \sum_{i=1}^4 (P_1 + P_2)_i \cdot (P_1 + P_2)_i \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c} = (m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Скорость  $V$  этой частицы можно найти из выражения для ее импульса  $P$ . Поскольку импульс сохраняется, мы имеем

$$P = \frac{MV}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}} = \gamma_1 m_1 v.$$

Отсюда

$$\gamma_1^2 m_1^2 v^2 (c^2 - V^2) = M^2 V^2 c^2.$$

Следовательно,

$$V = \frac{\gamma_1 m_1 v c}{\sqrt{M^2 c^2 + \gamma_1^2 m_1^2 v^2}}.$$

#### IV. 6.5.

а) На каждый электрон, попавший в магнитное поле, действует вращающий момент

$$\tau = \mu \times \mathbf{B} = -\frac{e}{2mc} g (\mathbf{s} \times \mathbf{B}),$$

или

$$\tau = \frac{egsB}{2mc} \text{ (поскольку } \mathbf{s} \perp \mathbf{B}).$$

Угловая скорость прецессии спина равна отношению вращающего момента к спину:

$$\Omega = \frac{\mathbf{s} \times \boldsymbol{\tau}}{s^2},$$

или

$$\Omega = \frac{egB}{2mc},$$

причем вектор  $\Omega$  совпадает по направлению с вектором магнитной индукции  $B$ .

б) Циклотронную частоту определяем по формуле  $\omega = eg/2mc \approx 8,8 \cdot 10^6$  рад·с<sup>-1</sup>·Гс (если пренебречь постоянной тонкой структуры  $\alpha$  в выражении для фактора  $g$ ).

в)

$$\varphi = \Omega t = \Omega \frac{\pi R}{v} = \pi \frac{egB}{2mc} \frac{mc}{eB} = \frac{\pi g}{2} = \pi + \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, измеряя  $\varphi$ , можно опытным путем определять численное значение  $\alpha$ . На этом принципе основаны известные эксперименты по измерению малых отклонений  $g$ -фактора мюона от значения, равного 2.

#### IV. 6.6.

а) Если электрон движется по круговой стационарной орбите, то

$$\frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}; \quad (1)$$

здесь  $v$  — линейная скорость электрона,  $r$  — радиус орбиты. Согласно квантовому постулату Бора,

$$\text{Орбитальный момент электрона} = mv r = n\hbar, \quad (2)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Исключая  $v$  в формулах (1) и (2), находим

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{me^2}. \quad (3)$$

Потенциальная энергия электрона на орбите

$$V = -\frac{e^2}{r},$$

а кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{e^2}{2r}.$$

Следовательно, полная энергия электрона дается выражением

$$E = -\frac{e^2}{2r} = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

б)

$$E(n=4) - E(n=2) = \frac{me^4}{2\hbar^2} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = (13,6 \text{ эВ}) \frac{3}{16} \approx 2,55 \text{ эВ}.$$

**IV. 7.1.**

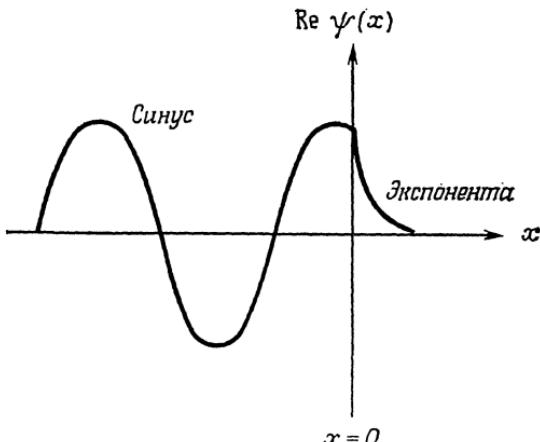
а) Уравнения Шредингера для рассматриваемых областей записываются следующим образом:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_0\psi(x) = E\psi(x), \quad x > 0,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \quad x < 0;$$

здесь  $V_0 = 20$  эВ,  $E = 10$  эВ.

б) Оба решения этих уравнений представлены на рисунке.



в) Дебройлевскую длину волны электрона вычисляем по формуле

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{(2mc^2)E}}.$$

Подставляя в нее значения  $m = 0,5$  МэВ/ $c^2$ ,  $\hbar c = 1,973 \times 10^{-11}$  МэВ·см и  $E = 10$  эВ, получаем

$$\lambda = \frac{(1,973 \cdot 10^{-11}) 2\pi}{3,2 \cdot 10^{-3}} \approx 4 \cdot 10^{-8} \text{ см};$$

здесь в знаменателе стоит числовое значение величины  $\sqrt{(2mc^2)E} = \sqrt{1,02 \text{ МэВ} \cdot 10^{-5} \text{ МэВ}} \approx 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ МэВ}$ .

г) Границные условия: функция  $\psi(x)$  и ее производная  $d\psi(x)/dx$  при  $x = 0$  должны быть непрерывными.

д) Вероятность нахождения электрона в области  $x > 0$  пропорциональна  $\exp(-2x/\lambda)$ .

**IV. 7.2.**

а) Собственные значения энергии:  $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar v_0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Четность собственных состояний:  $P = (-1)^l$ .

б) Собственные значения энергии:  $E_n = E_n^x + E_n^y + E_n^z = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right) h\nu_0$ .

Четность собственных состояний:  $P = (-1)^{n_x+n_y+n_z}$ .

Свойства состояний, соответствующих четырем самым нижним энергетическим уровням, сведены в следующую таблицу:

Таблица

$n_x + n_y + n_z$	$E_n$	Четность $P$	$n_x$	$n_y$	$n_z$	$l$	Кратность вырождения $\sum (2l+1)$
0	$\frac{3}{2} h\nu_0$	+1	0	0	0	0	1
1	$\frac{5}{2} h\nu_0$	-1	1	0	0	1	3
			0	1	0		
			0	0	1		
2	$\frac{7}{2} h\nu_0$	+1	1	1	0	2; 0	6
			0	1	1		
			1	0	1		
			2	0	0		
			0	2	0		
			0	0	2		
3	$\frac{9}{2} h\nu_0$	-1	1	1	1	3; 1	10
			2	1	0		
			1	2	0		
			2	0	1		
			1	0	2		
			0	2	1		
			0	1	2		
			3	0	0		
			0	3	0		
			0	0	3		

в) Используя выражения для четности  $P = (-1)^l$  и числа вырожденных состояний  $2l+1$ , находим, что каждой группе уровней соответствуют те значения  $l$ , которые приведены в таблице.

#### IV. 7.3.

а) Всего имеется 6 различных  $2p$ -состояний, поэтому число всевозможных состояний первого  $2p$ -электрона равно 6, а второго, согласно принципу Паули, — только 5. Таким образом, число всевозможных размещений для двух  $2p$ -электронов равно

30. Фактически же вследствие неразличимости обоих электронов число возможных состояний меньше, а именно  $30/2 = 15$ .

б) Пусть  $S$  и  $L$  — полные спиновый и орбитальный моменты обоих электронов. Общую волновую функцию  $\psi$  для обоих электронов можно представить в виде произведения спиновой волновой функции  $\psi_s(s_1, s_2)$  и орбитальной волновой функции  $\psi_L(r_1, r_2)$ . Теперь, если мы поменяем местами оба электрона, то получим

$$\psi(r_1, r_2) = (-1)^L \psi_L(r_2, r_1)$$

и

$$\psi_S(s_1, s_2) = (-1)^{S+1} \psi_S(s_2, s_1).$$

Отсюда следует, что

$$\psi(1, 2) = (-1)^{L+S+1} \psi(2, 1), \quad (1)$$

но, согласно статистике Ферми, волновая функция для обоих электронов должна быть антисимметричной, т. е.

$$\psi(1, 2) = (-1) \psi(2, 1). \quad (2)$$

Поэтому из (1) и (2) получаем

$$S + L = \text{Четное число}. \quad (3)$$

В силу того что  $S = s_1 + s_2$ , сумма  $S$  может быть либо 0, либо 1, а поскольку  $L = l_1 + l_2$ , то  $L$  может принимать значения 0, 1 или 2. Отсюда получаем следующие возможные квантовые состояния, удовлетворяющие условию (3):

$S$	$L$	$J$	Мультиплетность состояний $2J+1$
0	0	0	1
0	2	2	5
1	1	0	1
1	1	1	3
1	1	2	5

Полное число состояний равно 15.

#### IV. 7.4.

а)  $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$ .

б)  $3^2S_{1/2}$ .

в)  $3^2P_{1/2}, 3^2P_{3/2}$ .

г) Структура тонкого расщепления обязана спин-орбитальному взаимодействию, т. е. взаимодействию спина электрона с

магнитным полем ядра  $B$ , если рассматривать это взаимодействие в системе отсчета, жестко связанной с электроном.

д) Энергетический уровень, соответствующий большему значению  $J$ , расположен выше.

е) Поскольку потенциал кулоновского поля  $V \sim 1/r$ , то  $dV/dr \sim r^{-2}$ . Следовательно, при фиксированном значении  $L$  энергия взаимодействия пропорциональна

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \sim r^{-3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \sim r^{-3}.$$

Отсюда видно, что  $n = -3$ .

#### IV. 7.5.

а)

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z,$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x,$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y,$$

$$[L_i, L^2] = 0, \quad i = x, y, z.$$

б)

$$\begin{aligned} L^2 \varphi &= L^2 (L_x + iL_y) \psi_{lm} = (L_x + iL_y) L^2 \psi_{lm} = \\ &= (L_x + iL_y) \hbar^2 l(l+1) \psi_{lm} = \hbar^2 l(l+1) \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом доказано, что  $\varphi$  является собственным состоянием оператора  $L^2$ .

$$\begin{aligned} L_z \varphi &= L_z (L_x + iL_y) \psi_{lm} = (i\hbar L_y + L_x L_z + \hbar L_x + iL_y L_z) \psi_{lm} = \\ &= (L_x + iL_y) (m\hbar + \hbar) \psi_{lm} = (m+1)\hbar (L_x + iL_y) \psi_{lm} = (m+1)\hbar \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\varphi$  является также собственной функцией оператора  $L_z$ .

в) Предположим, что

$$L_x \psi_{00} = \sum_{l,m} A_{lm} \psi_{lm}; \tag{1}$$

здесь  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $l$  и  $l = 0, 1, 2, \dots$ , а  $A_{lm}$  — постоянные коэффициенты. Действуя оператором  $L^2$  на обе части равенства (1), получаем

$$L^2 L_x \psi_{00} = \hbar^2 \sum_{l,m} A_{lm} l(l+1) \psi_{lm}. \tag{2}$$

Левая часть полученного соотношения равна нулю, так как операторы  $L^2$  и  $L_x$  коммутируют друг с другом, а  $L^2 \psi_{00} = 0$ . Но функции  $\psi_{lm}$  являются ортонормированными; значит, все коэффициенты  $A_{lm}$ , за исключением  $A_{00}$ , в правой части соотношения (2) должны обращаться в нуль, т. е.

$$A_{lm} = 0 \quad (\text{кроме } A_{00}).$$

Таким образом мы доказали, что

$$L_x \psi_{00} = A_{00} \psi_{00}.$$

Аналогичным путем можно доказать и второе соотношение

$$L_y \psi_{00} = B_{00} \psi_{00}.$$

#### IV. 8.1.

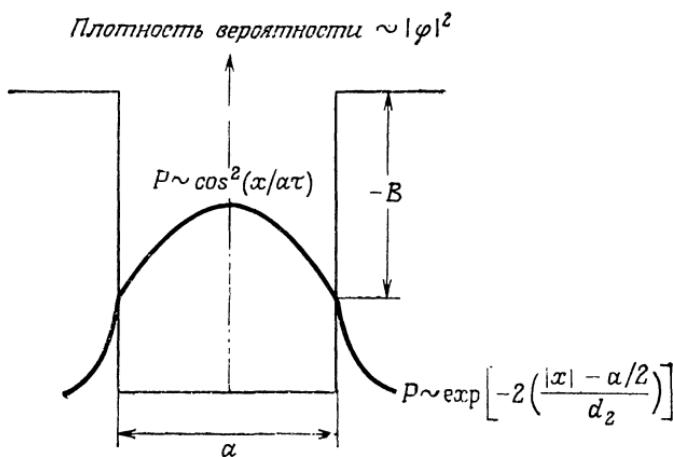
- а)  $^2P_{1/2}$ , поскольку имеется один неспаренный электрон.
- б)  $^1S_0$ , так как отсутствует внешний электрон.
- в)  $^2P_{3/2}$ , поскольку имеется «дырка» в  $2p$ -оболочке.
- г) В данном случае один из  $2p$ -электронов переходит в состояние  $3s$ , образуя «дырку» в  $2p$ -оболочке. Пользуясь правилом Хунда, находим

$$S = s_{2p} + s_{3s} = 1, \quad L = 1 \quad \text{и} \quad J = 0.$$

Следовательно, получаем возбужденное состояние  $^3P_0$ .

- д)  $^1S_0$ .

**IV. 8.2.** График волновой функции приведен на рисунке.



Волновая функция частицы, находящейся в потенциальной яме в основном состоянии, имеет только один максимум. Между стенками потенциальной ямы она характеризуется длиной волны  $\sim 2a$ . Вне потенциальной ямы плотность вероятности спадает экспоненциально:

$$P \sim \exp\left(-2 \frac{|x| - a/2}{d_z}\right).$$

На расстоянии  $x \equiv d \gg a/2 + d$  вероятность нахождения частицы становится настолько малой, что ею можно пренебречь.

**IV.8.3.** Спиновый магнитный момент электрона равен  $g_s \mu_B s$ . В магнитном поле спин электрона прецессирует с лармовой частотой

$$\omega = \frac{g_s \mu_B s}{\hbar} B = \frac{eB}{2mc} \quad \left( g_s = 2, s = \frac{1}{2} \right). \quad (1)$$

Если при прохождении электронами области между  $A_1$  и  $A_2$  направления их спинов изменяются на большой угол, скажем  $180^\circ$ , то электроны не смогут пройти через магнитную систему  $A_2$ , потому что в полях магнитов  $A_1$  и  $A_2$  на них действуют отклоняющие силы в одном и том же направлении. Таким образом, мы имеем условие

$$\theta \approx \pi = \omega t = \frac{eBt}{2mc}, \quad (2)$$

из которого находим магнитное поле

$$B \approx \frac{2mc\pi}{et} = \frac{\pi}{(8,8 \cdot 10^6)(10^{-6})} \approx 0,36 \text{ Гс.}$$

Это поле должно быть направлено либо параллельно пучку электронов, либо перпендикулярно плоскости  $x, z$ .

**IV.8.4.** В атоме большинство разрешенных переходов между энергетическими уровнями происходит за время  $\sim 10^{-9}$  с. Поэтому можно считать, что время жизни возбужденного  $2p$ -состояния в атоме водорода тоже порядка  $10^{-9}$  с. Пользуясь соотношением неопределенностей, находим ширину энергетического уровня

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} \approx \frac{6,6 \cdot 10^{-16}}{10^{-9}} = 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ эВ; } \quad (1)$$

здесь мы использовали значение  $\hbar$  в следующих единицах:

$$\hbar = \frac{1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}}{1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг/эВ}} \approx 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с.}$$

Значениям  $n = 2$  и  $J = 1/2$  соответствуют два уровня с  $l = 0$  и  $l = 1$ . Уровень с  $l = 0$  является метастабильным, поэтому его энергия может быть измерена с гораздо более высокой степенью точности, чем та, которую дают вычисления по формуле (1). Что касается уровня с  $l = 1$ , то его положение более неопределенno. Однако оба уровня расположены настолько близко друг к другу, что частота перехода между ними лежит в микроволновом диапазоне. Поскольку радиочастоты можно измерить с весьма высокой точностью, то имеется возможность определить экспериментально среднюю частоту квантов, поглощенных на этом переходе, что равносильно измерению с большой точностью сред-

него энергетического сдвига между этими уровнями. Используя соотношение

$$\overline{E(l=1)} = \overline{E(l=1) - E(l=0)} + E(l=0),$$

можно определить *среднюю* энергию уровня, соответствующего  $l = 1$ , с гораздо большей точностью, чем она дается формулой (1).

#### IV. 8.5.

а)  $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0,53 \text{ Å} = 5,3 \cdot 10^{-9} \text{ см.}$

б)  $r_0 = \frac{\hbar^2}{mZe^2} \approx 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ Å} = 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ см.}$

в)  $\lambda = \frac{\hbar}{mc} \approx 3,8 \cdot 10^{-11} \text{ см}; \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \approx 2,42 \cdot 10^{-10} \text{ см.}$

г)  $\lambda = \frac{\hbar}{m_\pi c} \approx 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}; \quad \lambda = \frac{\hbar}{m_\pi c} \approx 8,88 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$

д)  $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n E}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2m_n c^2 E}} = \frac{1973}{\sqrt{2 \cdot 10^3 \cdot 10^4}} \approx 0,44 \cdot 10^{-3} \text{ Å} = 44 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$

е)  $\lambda = \frac{\hbar}{P} = \frac{\hbar c}{Pc} = \frac{1973}{10^{10}} = 1,973 \cdot 10^{-7} \text{ Å} = 1,973 \cdot 10^{-15} \text{ см.}$

ж) Для мюонного нейтрино с  $m_\nu < 1,2 \text{ МэВ}/c^2$  имеем  $\lambda = \frac{\hbar}{m_\nu c} \gtrsim 10^{-3} \text{ Å} = 10^{-11} \text{ см}$ , и для электронного нейтрино с  $m_\nu < 60 \text{ эВ}/c^2$  имеем  $\lambda = \frac{\hbar}{m_\nu c} \gtrsim 30 \text{ Å} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ см.}$

з) Поскольку  $r \approx 1,3 \cdot 10^{-13} \sqrt[3]{A} \text{ см}$ , а  $\sqrt[3]{A} \approx 6$ , то получаем  $r \approx 8 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$

#### IV. 8.6.

а) Пусть  $P$  — оператор четности, который «отражает» все координаты относительно начала системы отсчета. Полагая, что все состояния имеют определенную четность, имеем

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \langle \psi, p\psi \rangle = \langle P\psi, pP\psi \rangle = \langle PP\psi, PpP\psi \rangle = \\ &= \langle \psi, PpP\psi \rangle = \langle \psi, -p\psi \rangle = -\langle \psi, p\psi \rangle = -\langle p \rangle, \end{aligned}$$

поскольку  $PP = 1$ . Следовательно,  $\langle p \rangle \equiv 0$ .

б) Если все собственные состояния, соответствующие собственному значению энергии  $E_i$ , имеют определенную и одинаковую четность, то среднее значение радиус-вектора  $\mathbf{r}$  должно равняться нулю.

**IV. 8.7.**

а) Полагая, что в атомах легких элементов преобладает LS связь, получаем следующие правила отбора для электрических дипольных переходов:

- 1) должна изменяться четность,
- 2)  $\Delta L = \pm 1$ ,  $\Delta M = \pm 1, 0$ ,
- 3)  $\Delta S = 0$ ,
- 4)  $\Delta J = 0, \pm 1$  (исключая переход  $J_i = 0 \rightarrow J_f = 0$ ).

б) В атомах тяжелых элементов следует принимать во внимание  $J - J$ -связь. Поэтому получаем следующие правила отбора:

- 1) в любой момент времени реализуется переход только для одного электрона,
- 2)  $\Delta J = 0, \pm 1$ , и для электрона, совершившего переход,  $\Delta l = \pm 1$  и  $\Delta j = 0$  или  $\pm 1$ ,
- 3) изменяется четность.

в) В случае ядер налагается ограничение на изменение ядерного спина  $\Delta I = \pm 1, 0$ . Четность также должна изменяться (но не для перехода  $I_i = 0 \rightarrow I_f = 0$ ).

**IV. 8.8.** Сверхтонкое расщепление связано с взаимодействием магнитного момента ядра  $\mu_n$  и магнитного поля  $\mathbf{B}_e$ , обусловленного орбитальным движением электрона. Энергия взаимодействия равна  $\mu_n \cdot \mathbf{B}_e$ ; она обратно пропорциональна массе ядра  $M$ , поскольку  $\mu_n = e\hbar/2Mc^1)$ .

Тонкое расщепление объясняется взаимодействием магнитного момента электрона  $\mu_e$  с кулоновским полем ядра  $\mathbf{E}$ . Энергия взаимодействия равна  $\mu_e \cdot \mathbf{E}$ . Она обратно пропорциональна массе электрона  $m_e$ , так как  $\mu_e = e\hbar/2m_e c$ . В то же время на малых расстояниях от ядра ( $r \approx 0$ ) поле  $\mathbf{E}$  в пренебрежении эффектом экранировки растет пропорционально заряду ядра ( $E \sim Z$ ). Следовательно, энергия взаимодействия оказывается пропорциональной  $Z$ . В результате получаем

$$\frac{\text{Сверхтонкое расщепление}}{\text{Тонкое расщепление}} \sim \frac{1/M}{Z/m} = \frac{m}{MZ}.$$

**IV. 8.9.**

а) Даны функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

<sup>1)</sup> Магнитные моменты протонов и нейтронов, из которых состоят ядра, не сводятся к указанному выражению для  $\mu_n$ , но имеют тот же порядок величины. — Прим. ред.

где

$$a_n = \frac{x^n}{(n!)^p}.$$

Мы видим, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{(n+1)^p} \rightarrow 0.$$

Следовательно, функция  $f(x)$  конечна при любом конечном значении  $x$ . В случае  $x \rightarrow \infty$  она стремится к бесконечности быстрее любой степенной функции.

б) Функция не относится к возможным решениям уравнения Шредингера, поскольку не является нормируемой из-за расходности интеграла.

**IV. 9.1.** Обозначим через  $K_\alpha$  и  $K_D$  кинетические энергии  $\alpha$ -частицы и дейтрона соответственно. Тогда <sup>1)</sup>)

$$K_\alpha = \frac{P_\alpha^2}{2M_\alpha} = \frac{(Q_\alpha BR)^2}{2M_\alpha},$$

$$K_D = \frac{P_D^2}{2M_D} = \frac{(Q_D BR)^2}{2M_D}.$$

Отсюда находим

$$\frac{K_\alpha}{K_D} = \frac{M_D}{M_\alpha} \frac{Q_\alpha^2}{Q_D^2} = \frac{(2)(2)^2}{(4)(1)} = 2.$$

Следовательно,

$$K_\alpha = 2K_D = 32 \text{ МэВ.}$$

**IV. 9.2.** Плотность ядра  $\rho \sim 10^{15} \text{ г/см}^3$ . Такая величина получается при умножении плотности обычного вещества на отношение объема атома к объему ядра:

$$\rho = (1 \text{ г/см}^3) \left( \frac{r_a}{r_n} \right)^3 \approx \left( \frac{10^{-8}}{10^{-13}} \right)^3 = 10^{15} \text{ г/см}^3.$$

**IV. 9.3.** Отношение сечений равно 4, поскольку кулоновское рассеяние пропорционально  $Z^2$ .

**IV. 9.4.**  $2mc^2 = 2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1,8 \cdot 10^{17} \text{ Дж.}$

<sup>1)</sup>) Здесь используются следующие обозначения:  $Q_\alpha$  и  $Q_D$  — заряды  $\alpha$ -частицы и дейтрона,  $M_\alpha$  и  $M_D$  — их массы соответственно,  $B$  — индукция магнитного поля в циклотроне, а  $R$  — радиус орбиты. Возможности ускорения в циклотронах ограничены нерелятивистской областью энергий. Поэтому приводимые здесь формулы также не нуждаются в релятивистских поправках. — Прим. ред.

**IV. 9.5.** Она равна 6,8 эВ, так как приведенная масса позитрона равна половине массы электрона.

**IV. 9.6.** Атом натрия имеет шесть уровней энергии с тремя парами различных переходов. Поэтому при зеемановском расщеплении будут наблюдаться три спектральные линии, соответствующие  $\Delta m_J = +1, 0$  и  $-1$ .

**IV. 9.7.** В соответствии с принципом неопределенности  $p \approx \hbar/R$ . Следовательно,

$$\text{Кин. эн.} \approx \frac{\hbar^2}{2R^2m}.$$

**IV.9.8.** Из соотношения  $\hbar c/\lambda = 25$  кэВ находим  $\lambda = 0,08 \text{ \AA}$ .

**IV. 9.9.** Максимальный импульс частиц изменится в  $(1/2)^{1/3}$  раз, потому что  $P_{\max} \sim V^{-1/3}$ .

**IV. 9.10.** Магнитный момент протона равен  $2,8\mu_{\text{яд}}$  ( $\mu_{\text{яд}} —$  ядерный магнетон), т. е.  $1,4 \cdot 10^{-23}$  эрг/Гс.

**IV. 9.11.**  ${}^1S_0$ .

**IV. 9.12.** Кинетическая энергия увеличится в  $\alpha^2$  раз<sup>1)</sup>:

$$\text{Кин. эн.} = \left\langle \psi(ar), \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} \psi(ar) \right\rangle = \alpha^2 \left\langle \psi(ar), \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d(ar)^2} \psi(ar) \right\rangle,$$

а потенциальная энергия уменьшится в  $\alpha^2$  раз:

$$\begin{aligned} \text{Пот. эн.} &= \left\langle \psi(ar), \frac{k}{2} r^2 \psi(ar) \right\rangle = \frac{1}{\alpha^2} \left\langle \psi(ar), \frac{k}{2} \alpha^2 r^2 \psi(ar) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left\langle \psi(r), \frac{k}{2} r^2 \psi(r) \right\rangle. \end{aligned}$$

1) Приведенное автором решение требует уточнения. Дело в том, что нужно учесть изменение нормировки и правильно записать оператор кинетической энергии для трехмерного осциллятора. Для заданных условий имеем

$$\text{Кин. эн.} = -\frac{N\hbar^2}{2m} \int_0^\infty \psi^*(r, t) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} \right] r^2 dr;$$

сюда входит нормировочный множитель  $N$ :

$$N = 1 \int_0^\infty \psi^*(r, t) \psi(r, t) r dr.$$

Следует заметить, что задача составлена формально, ибо состояние с волновой функцией  $\psi(ar, t)$  не является решением уравнения Шредингера для рассматриваемой задачи. Это очевидно хотя бы из того, что если первое состояние  $\psi(r, t)$  было устойчивым, то изменение кинетической энергии в одну сторону, а потенциальной в противоположную обязательно нарушит такую устойчивость. — Прим. ред.

**IV. 9.13.**

а) Электрон в основном состоянии создает круговой ток

$$i = \frac{ev}{2\pi a_0}, \quad (1)$$

где  $e$  — заряд и  $v$  — скорость электрона, а  $a_0$  — радиус боровской орбиты. Этот ток создает в центре орбиты радиусом  $a_0$  магнитное поле

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a_0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{a_0^2} = (10^{-7}) \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})(2,2 \cdot 10^6)}{(0,53 \cdot 10^{-10})^2} \approx 12,5 \text{ Вб/м}^2 = 1,25 \cdot 10^5 \text{ Гс};$$

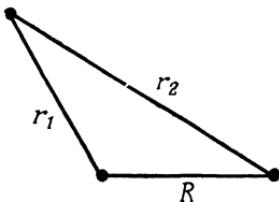
здесь использована подстановка  $v = \alpha c = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$  и  $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ .

б) Разность энергий между состояниями протона со спином, направленным вверх и вниз, равна

$$\Delta E = 2B\mu_{\text{яд}} = (2,5 \cdot 10^5)(3,15 \cdot 10^{-12}) = 7,88 \cdot 10^{-7} \text{ эВ.}$$

Здесь  $\mu_{\text{яд}} = 3,15 \cdot 10^{-12} \text{ эВ/Гс.}$

$$\text{в)} \omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{\Delta E c}{\hbar c} = \frac{(7,88 \cdot 10^{-7} \text{ эВ})(3 \cdot 10^{18} \text{ А/с})}{1973 \text{ эВ} \cdot \text{А}} \approx 1,2 \cdot 10^9 \text{ рад/с.}$$

**IV. 9.14.**

а) При  $R = 0$  оба положительных заряда находятся в начале координат. Следовательно,  $E(0)$  в 4 раза должно превышать энергию связи электрона в атоме водорода в основном состоянии:

$$E_0(0) = -4(R_H) = -54,4 \text{ эВ.} \quad (1)$$

Если  $R \rightarrow \infty$ , то удаленный протон не оказывает никакого влияния на электрон. Поэтому

$$E_0(\infty) = -R_H = -13,6 \text{ эВ.} \quad (2)$$

б) Полная потенциальная энергия системы по условию задачи равна

$$V(R) = E_0(R) + \frac{e^2}{R}. \quad (3)$$

Условие равновесия протонов записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dR} V(R) = 0. \quad (4)$$

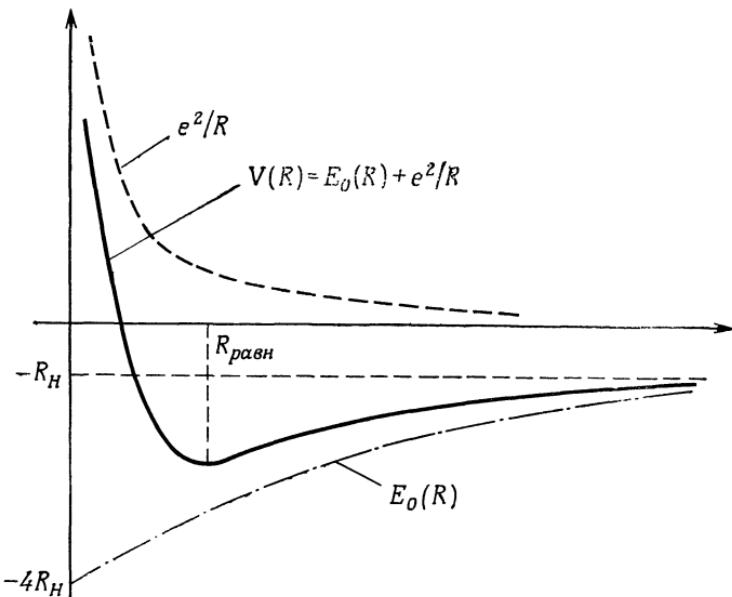
Подставляя выражение для потенциальной энергии (3) в (4), получаем

$$-\frac{e^2}{R^2} + \frac{dE_0(R)}{dR} = 0, \quad (5)$$

откуда находим

$$R_{\text{равн}} = \frac{e}{\sqrt{\frac{dE_0(R)}{dR}} \Big|_{R=R_{\text{равн}}}}. \quad (6)$$

в) Приблизительная зависимость  $E_0(R)$  показана на следующем рисунке:



г) Если оба протона находятся в нижнем возбужденном состоянии, то следует учитывать дополнительные энергетические уровни, отвечающие колебательным и вращательным степеням свободы протонов, с энергиями

$$U_{\text{кол}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

и

$$U_{\text{вр}} \sim \frac{1}{m_p} J(J+1), \quad J = 1, 2, 3, \dots,$$

причем  $\omega_c$  можно выразить через  $V(R)$ , массу протона  $m_p$  и  $R_{\text{равн.}}$

#### IV. 9.15.

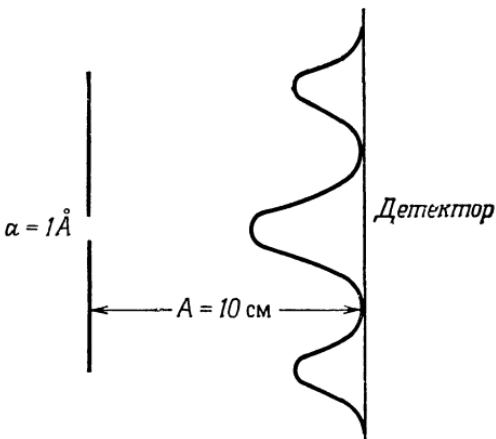
а) Конечная энергия каждого электрона равна 37 эВ. Следовательно, для дебройлевской длины волны электрона получаем

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2 E}} = \frac{1973}{\sqrt{(1,02 \cdot 10^6)(37)}} \approx 0,32 \text{ \AA}.$$

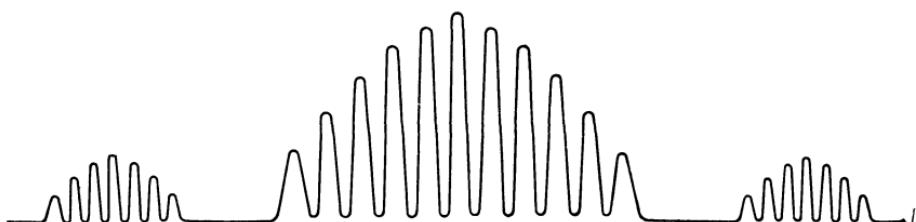
Ширина центрального максимума дифракционной картины определяется по формуле<sup>1)</sup> из классической оптики:

$$x \approx \frac{2\lambda}{a} A \approx 6,4 \text{ см};$$

это та ширина, в пределах которой электрон может быть зарегистрирован.



б) При наличии двойной щели будет наблюдаться следующая интерференционная картина:



<sup>1)</sup> В данную формулу следует подставлять  $\lambda = 2\pi\tilde{\lambda}$ . Поскольку она справедлива лишь при  $\lambda \ll a$ , то ее применение нельзя считать оправданным. — Прим. перев.

в) Согласно квантовой механике, волновая функция одиночного электрона может интерферировать сама с собой. Поэтому должна наблюдаться та же картина, что и в п. «б».

г) Если бы существовал такй детектор и можно было бы регистрировать прохождение электронов через одну из щелей, то мы получили бы дифракционную картину от одной щели. Однако из-за неопределенности координат и импульсов сами электроны и детекторы оказываются столь ненадежными объектами (т. е. нельзя ни жестко закрепить второй детектор на щели, ни узнать, падают ли электроны на нее параллельным пучком), что вряд ли можно получить какую-либо достоверную информацию от второго детектора<sup>1)</sup>. Сохранится интерференционная картина от двойной щели. (См. книгу: *R. M. Eisberg, Fundamental of Modern Physics*, 1961, стр. 161.)

#### IV. 10.1.

а) Поскольку  $Z = 15$ , а  $m_\mu = 206m_e$ , то для энергии излученного фотона получаем

$$E_{3 \rightarrow 2} = Z^2 R_\infty (206) \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \approx 88 \text{ кэВ}$$

(здесь  $R_\infty = 13,6 \text{ эВ}$ ).

б) Границе  $K$ -полосы поглощения у свинца соответствует энергия

$$E_K = (Z - 1)^2 R_\infty = (81)^2 (13,6 \text{ эВ}) \approx 89,3 \text{ кэВ},$$

и  $K$ -серия линий рентгеновского излучения простирается (от 67) до 89,3 кэВ. Поэтому, когда мю-мезон переходит с уровня  $n = 3$  на уровень  $n = 2$ , он излучает фотон на частоте рентгеновского излучения, под действием которого электрон из  $K$ -оболочки атома свинца может перейти в возбужденное состояние. Следовательно, коэффициент поглощения у свинца оказывается довольно значительным.

в) Давайте поступим следующим образом:

- 1) Установим источник  $\gamma$ -квантов, энергия которых была определена в п. «а».
- 2) Поместим счетчик  $\gamma$ -квантов непосредственно за свинцовой фольгой, служащей поглотителем. Мы зафиксируем слабый сигнал от источника, поскольку элемент с  $Z = 82$  обладает большим поглощением, как было показано в п. «б».

<sup>1)</sup> Объяснение автора может не удовлетворить читателя. Подробно об интерференционном опыте с электронами можно узнать из книги: *P. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике*, т. 3—4, «Мир», 1977, стр. 207—216, или из книги: *Э. Вихман, Квантовая физика (БКФ)*, «Наука», 1974, стр. 206—207. Об аналогичном опыте с фотонами см. там же, стр. 168—178. — Прим. перев.

3) Будем последовательно заменять свинец другими поглощающими элементами с меньшими номерами  $Z$  (81, 80, 79 ...), но с одинаковой радиационной длиной. Попытаемся регистрировать  $\gamma$ -кванты способом, указанным в п. 2.

4) Построим зависимость наблюдаемой интенсивности излучения  $\gamma$ -квантов от атомного номера  $Z$  соответствующего поглотителя. При некотором значении  $Z = Z_1$  мы заметим резкое увеличение интенсивности наблюдаемого излучения. Иными словами, для веществ с  $Z > Z_1$  регистрируются сравнительно сильные сигналы, а с  $Z < Z_1$  — только слабые. Таким образом, получаем следующее неравенство:

*Энергия границы K-полосы поглощения у элемента с номером  $Z_1 + 1 \geq E_{3 \rightarrow 2} \geq$  Энергия границы K-полосы поглощения у элемента с номером  $Z_1$ ,*

где  $Z_1 = 81$ , или

$$E_K(Z_1 + 1) \geq E_{3 \rightarrow 2} \geq E_K(Z_1).$$

Из этого соотношения можно установить верхний и нижний пределы для массы мю-мезона:

$$203m_e \leq m_\mu \leq 209m_e.$$

Если бы масса мю-мезона оказалась значительно больше, то соответственно намного больше, чем 82, оказалось бы и число  $Z_1$ . Элемент с таким номером вряд ли удалось бы найти среди известных нам устойчивых элементов, и, следовательно, он был бы для нас недоступен.

#### IV. 10.2.

а) Энергия рассеянного излучения равна энергии излучения движущегося заряда:

$$\frac{\text{Энергия рассеянного излучения}}{\text{Единица времени}} \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}. \quad (1)$$

Если электрическое поле падающего излучения в месте расположения заряда равно  $E$ , то

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -e \frac{\mathbf{E}}{m}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), находим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^3}. \quad (3)$$

Интенсивность падающего излучения равна

$$I = \frac{cE^2}{4\pi}. \quad (4)$$

По определению сечение томсоновского рассеяния дается выражением

$$\sigma_T \equiv \frac{1}{I} \frac{dw}{dt}.$$

Таким образом, подставляя сюда выражения (3) и (4) для  $dw/dt$  и  $I$ , получаем

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (5)$$

б) Томсоновское рассеяние — это предельный нерелятивистский случай комптоновского рассеяния. Кроме того, они совпадают, если рассматривается рассеяние излучения в прямом направлении при малом изменении длины волны, т. е.

$$\sigma_K = \sigma_T f(\cos \theta, E_\gamma),$$

где  $f(1, E_\gamma \ll m_e c^2) \approx 1$ .

в) Используя законы сохранения энергии и импульса, мы получаем следующую формулу для комптоновского рассеяния:

$$E_{\text{расс}} = \frac{E_{\text{пад}}}{E_{\text{пад}} (1 - \cos \theta)/m_0 c^2 + 1}. \quad (6)$$

Подставляя в эту формулу  $\theta = 90^\circ$ ,  $m_0 c^2 = m_e c^2 = 0,5$  МэВ и  $E_{\text{пад}} = 0,5$  МэВ, находим энергию  $\gamma$ -квантов, рассеянных на электронах:

$$E_{\text{расс}} \approx 0,25 \text{ МэВ.}$$

Если происходит рассеяние на протоне, то  $m_0 c^2 = m_p c^2 \gg E_{\text{пад}}$  и

$$E_{\text{расс}} = E_{\text{пад}}.$$

Из формулы (5) следует, что сечение рассеяния пропорционально  $1/m^2$ . Отсюда для  $\gamma$ -квантов малых энергий получаем такое отношение сечений рассеяния на электронах и протонах:

$$\frac{\gamma + e^-}{\gamma + p^+} \approx \frac{m_p^2}{m_e^2} \approx 4 \cdot 10^6.$$

**VI. 10.3.** Энергия осциллятора с квантовым числом  $n$  равна

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad (1)$$

где  $\omega$  — круговая частота осциллятора. Запишем соответствующее выражение для энергии из классической механики:

$$E_n = \frac{m}{2} A^2 \omega^2, \quad (2)$$

где  $A$  — амплитуда колебаний. Из (1) и (2) следует

$$A^2 = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{\omega m}. \quad (3)$$

Подставляя в формулу излучения ускоренно движущегося заряда

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}$$

величину  $a = A\omega^2$ , получаем

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 A^2 \omega^4}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^3}{mc^3} (2n + 1) \hbar. \quad (4)$$

Согласно правилу отбора для осциллятора,  $\Delta n = \pm 1$ . Если электрон переходит из состояния с номером  $n$  в состояние с номером  $n - 1$ , мы говорим, что он больше не находится в состоянии  $n$ . Следовательно, среднее время жизни осциллятора на уровне  $n$

$$\tau = \frac{E_n - E_{n-1}}{dw/dt} = \frac{3mc^3}{2e^2\omega^2(2n+1)}.$$

#### IV. 10.4.

а) Частица массой  $m$  внутри потенциального ящика описывается уравнением Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = E\Psi.$$

Поскольку на стенах ящика потенциал обращается в бесконечность, то на стенах волновая функция

$$\Psi(x, y, z) = 0.$$

Собственные значения полной энергии  $E$  протона (или нейтрона) определяются выражением

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2},$$

где  $n_x$ ,  $n_y$  и  $n_z$  — положительные целые числа, а  $a$  — размер потенциального ящика. В результате получаем

$$\frac{dn}{dE} = \frac{ma^2}{\pi^2 \hbar^2 n}.$$

б) Поскольку полное число нейтронов (или протонов) связано с  $n$  соотношением

$$N \text{ (или } Z) = \frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} \pi n^3 \right) \cdot 2 = \frac{\pi n^3}{3},$$

или

$$n^2 = \left( \frac{3N}{\pi} \right)^{2/3}$$

(здесь  $n$  — положительно и каждому его значению соответствуют два спиновых состояния частицы), то получаем для нейтрана

$$E_f = 3^{2/3} \pi^{4/3} \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{2ma^2}$$

и аналогично для протона

$$E_f = 3^{2/3} \pi^{4/3} \frac{\hbar^2 Z^{2/3}}{2ma^2}.$$

в) Обозначим  $A/a^3 = \rho$ ,  $N/A = \alpha_n$  и  $Z/A = \alpha_p$ . (Замечание. Не забудьте, что  $A = N + Z$ .) Поскольку  $\rho$ ,  $\alpha_n$  и  $\alpha_p$  являются постоянными, а  $N = \alpha_n A = \alpha_n \rho a^3$  и  $Z = \alpha_p A = \alpha_p \rho a^3$ , то

$$\frac{N^{2/3}}{a^2} = (\alpha_n \rho)^{2/3} = \text{const},$$

$$\frac{Z^{2/3}}{a^2} = (\alpha_p \rho)^{2/3} = \text{const}.$$

Следовательно, энергия  $E_f$  в выше написанных формулах — постоянная величина.

г) Здесь для оценки можно ввести общее потенциальное поле для всех протонов<sup>1)</sup>). При этом все энергетические уровни протонов повысятся.

#### IV. 10.5.

Если предположить, что орбитальный момент  $3d$ -электрона в ионах  $Ti^{3+}$  полностью «заморожен», т. е.  $\langle L_z \rangle = 0$ , то орбитальное движение не дает никакого вклада в эффективный магнитный момент. (См. Ch. Kittel., Introduction to Solid State Physics, 1971, стр. 629<sup>2)</sup>.) В этом случае мы имеем дело с нормальным эффектом Зеемана: происходит расщепление энергетических уровней в магнитном поле на подуровни с различными значениями  $m_s$ . Обозначим через  $N_{1/2}$  (и  $N_{-1/2}$ ) число электронов,

<sup>1)</sup> В действительности этот потенциал не постоянен. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> См. перевод раннего издания этой книги (1956 г.); Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, Физматгиз, 1963, стр. 244—251; см. также Ч. Киттель, Элементарная физика твердого тела, «Наука», 1965, стр. 267—271. — Прим. перев.

спин которых параллелен (и антипараллелен) направлению поля  $B$ . Мы имеем следующее отношение:

$$N_{1/2} : N_{-1/2} = \exp\left(\frac{x}{kT}\right) : \exp\left(-\frac{x}{kT}\right),$$

где (в предположении  $g = 2$ )

$$x = \frac{e\hbar B}{2mc} = 0,93 \cdot 10^{-16} \text{ эрг.}$$

(Замечание. Поскольку заряд электрона отрицательный, то направления спинового и магнитного моментов противоположны друг другу.) Отсюда находим относительную долю ионов титана, спин которых направлен по полю:

$$f = \frac{N_{1/2}}{N_{1/2} + N_{-1/2}} = \frac{1}{1 + \exp(-2x/kT)} = \frac{1}{1 + \exp(-1,86/1,38)} \approx 0,79.$$

**IV. 11.1.** Согласно принципу неопределенности, момент импульса копья  $J = I\dot{\theta}$  и сопряженная с ним угловая координата  $\theta$  не могут быть одновременно определены с произвольно высокой точностью, т. е.

$$I\dot{\theta}_0 \cdot \theta_0 = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}_0\theta_0 \approx \hbar; \quad (1)$$

здесь  $l$  — длина копья, а  $\theta_0$  и  $\dot{\theta}_0$  — возможные начальные значения угловой координаты и угловой скорости копья. Для оценки времени падения копья нужно определить порядок значений  $\dot{\theta}_0$  и  $\theta_0$ , соответствующих наилучшей балансировке копья в вертикальном положении. Проще всего предположить, что копье идеально сбалансирано, когда неопределенность его кинетической энергии равна по порядку величины неопределенности его потенциальной энергии<sup>1)</sup>:

$$\frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}_0^2 \approx \frac{1}{4} mg\theta_0^2 l$$

(в строго вертикальном положении потенциальная энергия копья принята равной нулю), или

$$\sqrt{\frac{l}{3}} \dot{\theta}_0 \approx \sqrt{\frac{g}{2}} \theta_0. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$\theta_0^2 \approx \frac{\hbar}{ml^2} \sqrt{\frac{6l}{g}} \quad (3)$$

<sup>1)</sup> В действительности это требует доказательства. — Прим. ред.

и

$$\dot{\theta}_0^2 \approx \frac{3\hbar}{ml^2} \sqrt{\frac{3g}{2l}}. \quad (4)$$

Уравнение движения копья записывается в виде

$$mg \frac{l \sin \theta}{2} \approx \frac{1}{2} mgl\theta \equiv \text{Вращающий момент} = I\ddot{\theta} = \frac{1}{3} ml^2\ddot{\theta},$$

или

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \theta.$$

Интегрируя это уравнение, находим решение

$$\theta = \theta_0 \exp \sqrt{\frac{3g}{2l}} t = \sqrt{\frac{\hbar}{ml^2}} \sqrt{\frac{6l}{g}} \exp \sqrt{\frac{3g}{2l}} t; \quad (5)$$

здесь мы учли начальное условие (3). При  $\theta \approx 1$  копье можно считать практически упавшим. Таким образом, из (5) получаем искомое время

$$t = \sqrt{\frac{2l}{3g}} \ln \sqrt{\frac{ml^2}{\hbar}} \sqrt{\frac{g}{6l}}.$$

Если сюда подставить<sup>1)</sup>  $l = 1000$  см и  $m = 1$  г, то получим  $t \approx 30$  с.

#### IV. 11.2.

а) Энергия волны квантована:

$$E = n\hbar\omega = n\hbar Dk^2.$$

Отсюда находим фазовую скорость

$$v = \frac{E}{P} = \frac{n\hbar Dk^2}{\hbar k} = nDk = nD \sqrt{\frac{\omega}{D}} = n\sqrt{D\omega}$$

и групповую скорость волны

$$u = \frac{dE}{dP} = \frac{dk}{dP} \frac{dE}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{1}{\hbar} (2n\hbar Dk) = 2nDk = 2n\sqrt{D\omega}.$$

б) Согласно закону излучения абсолютно черного тела, тепловая энергия имеет следующее распределение:

$$W(E_n) \sim \frac{1}{\exp\left(\frac{E_n}{kT}\right) - 1}$$

<sup>1)</sup> Автор подставляет далекие от действительности цифры. Однако, ввиду того что под знаком логарифма получается огромное число ( $\approx 2 \cdot 10^{16}$ ) и оно при подстановке реальных цифр изменяется не более чем на порядок, ответ оказывается практически тем же. — Прим. перев.

(здесь  $\kappa$  — постоянная Больцмана). Определяем интегральную по спектру плотность энергии:

$$u = \int_0^{\infty} E_n W(E_n) \frac{4\pi k^2 dk}{\hbar^3},$$

где  $4\pi k^2 dk / \hbar^3$  — плотность состояний. Подставляя в эту формулу выражения для  $E_n$  и  $W(E_n)$ , получаем

$$\begin{aligned} u &= n\hbar D \int_0^{\infty} k^4 \left[ \frac{1}{\exp\left(\frac{n\hbar D k^2}{\kappa T}\right) - 1} \right] \frac{4\pi dk}{\hbar^3} = \\ &= \frac{4\pi n D}{\hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{k^4 dk}{\exp\left(\frac{n\hbar D k^2}{\kappa T}\right) - 1} = \frac{4\pi n D}{\hbar^2} \left(\frac{\kappa T}{n\hbar D}\right)^{5/2} f; \end{aligned}$$

здесь

$$f = \int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{\exp(x^2) - 1} = \text{const.}$$

Следовательно,

$$u \sim T^{5/2}.$$

#### IV. 11.3.

а) Волновая функция является функцией пространственных координат  $x, y, z$  и времени  $t$ , описывающей состояние системы. При этом:

- 1) Волновая функция представляет собой амплитуду вероятности и может интерферировать сама с собой.
  - 2) Квадрат модуля волновой функции характеризует вероятностное состояние рассматриваемой системы.
  - 3) Она описывает состояние одиночной частицы<sup>1)</sup> (фотона, электрона и т. д.) в отличие от статистической функции распределения, которая характеризует состояние большого числа таких частиц.
- б)  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ ; на это правило векторного сложения двух моментов импульса  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$  налагается следующее условие:

$$|J| = |J_1| - |J_2|, \quad |J_1| - |J_2| + 1, \dots, \quad |J_1| + |J_2|;$$

здесь мы предположили, что  $|J_1| > |J_2|$ .

- в)  $\Delta j = 0, \pm 1$  (исключая  $j = 0 \rightarrow j = 0$ ),

$$\Delta l = \pm 1,$$

$$\Delta m = \pm 1, 0.$$

<sup>1)</sup> В действительности важно не то, что частица одиночная (можно записать волновую функцию и для нескольких частиц), а отсутствие влияния «термостата». — Прим. ред.

г) Коммутатор операторов  $G$  и  $F$  должен быть равен нулю:

$$[G, F] = GF - FG = 0.$$

**IV. 11.4.** Используя принцип неопределенности, найдем сначала импульс нуклона. Если размер нуклона находится в пределах  $\Delta x$ , то его импульс должен быть порядка

$$\Delta P \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{10^{-27}}{3 \cdot 10^{-13}} \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ дин} \cdot \text{с};$$

здесь  $\Delta x$  приближенно равно диаметру ядра углерода:  $\Delta x \approx 3 \cdot 10^{-13}$  см. Отсюда кинетическая энергия нуклона в основном состоянии равна

$$3 \frac{(\Delta P)^2}{2m} \approx \frac{3\hbar^2}{2(\Delta x)^2 m} \approx 7 \text{ МэВ.}$$

Средняя энергия нуклона должна быть несколько больше этого значения. В самом деле, применяя статистику Ферми для случая  $kT \ll E_f$ , мы получаем следующее выражение для средней энергии нуклона в ядре:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{3}{5} E_f = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^2 n}{V} \right)^{2/3} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 c^2}{2mc^2} \left[ \frac{3\pi^2 \cdot 6}{(4\pi/3)(3 \cdot 10^{-13})^3} \right]^{2/3} \approx \\ &\approx \frac{3 \cdot (1,973 \cdot 10^{-11})^2 \cdot 12,6}{9380 \cdot (10^{-13})^2 \cdot 9} \approx 17 \text{ МэВ} \end{aligned}$$

(вывод формулы для энергии Ферми  $E_f$  дан в решении задачи IV. 10.4).

**IV. 11.5.** В результате предполагаемой ядерной реакции на Солнце выделяется

$$\frac{4 \cdot 10^{26}}{26 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}} \approx 10^{38} \text{ атомов Не в секунду.}$$

**IV. 11.6.** Энергия фотонов рентгеновского излучения в  $K$ -линиях спектра меди равна  $\sim 13,6 \cdot (29 - 1)^2$  эВ  $\approx 10,6$  кэВ.

**IV. 11.7.** Воспользуемся законом сохранения 4-импульса

$$P_1 + P_2 = P_f,$$

где  $P_f$  — суммарный 4-импульс частиц после столкновения. Следовательно,

$$2m_e^2 c^2 + 2m_e E_e = m_f^2 c^2,$$

откуда

$$E_e = \frac{m_f^2 c^2 - 2m_e^2 c^2}{2m_e}.$$

Условию  $m_j = 4m_e$  соответствует минимальная энергия движущегося электрона, при которой происходит рождение пары электрон — позитрон. Следовательно,  $E_e = 7m_ec^2$ , т. е. пороговая кинетическая энергия электрона равна приблизительно 3 МэВ.

**IV. 11.8.** Потенциальная энергия системы минимальна, когда магнитные моменты неспаренных электронов принимают одинаковую ориентацию и спины электронов в состояниях с  $n = 3$  выстраиваются в одном направлении. Следовательно,  $S = (1/2)(6-2) = 2$ . Далее, согласно правилу Хунда,  $L = 2$  и  $J = 4$ . Таким образом, атом находится в состоянии

$$(1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 4s^2, 3d^6)^5D_4.$$

**IV. 11.9.** Величина расщепления между энергетическими подуровнями соответствует частоте

$$\Delta\gamma = \frac{1}{\hbar} 2\mu_e B = \frac{2e\hbar B}{\hbar 4\pi mc} g_s s = \frac{eB}{2\pi mc} = \frac{e}{mc} \frac{B}{2\pi} = \frac{1,76 \cdot 10^7 \cdot 10^4}{6,28} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}.$$

#### IV. 11.10.

а)  $A$ , потому что  $\Delta E_1 = \langle \psi_0, H_1 \psi_0 \rangle$  больше нуля при  $H_1 > 0$ .

б)  $A$ , так как  $\Delta E_1 = \langle \psi_1, H_1 \psi_1 \rangle$  больше нуля.

в)  $D$ , поскольку  $\Delta E_1 = \langle \psi_0, H_1 \psi_0 \rangle = 0$  для нечетной функции  $H_1$ , а во втором приближении

$$\Delta E_2 = \frac{|\langle \psi_0, H_1 \psi_1 \rangle|^2}{E_0 - E_1} < 0.$$

#### IV. 12.1.

а) Подставим  $x = x_1 - x_2$ ,  $R = x_1 + x_2$ ,  $\psi = \psi_x \psi_R$  и приведенную массу  $\mu = M/2$  в уравнение Шредингера для двух частиц с координатами  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда получим следующее уравнение, описывающее относительное движение:

$$H\psi_x \equiv \left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \right) \psi_x = E\psi_x.$$

После дифференцирования получаем

$$\left( -\frac{\mu k}{2\mu} x^2 + \frac{\hbar}{2\mu} \sqrt{\mu k} + \frac{1}{2} kx^2 \right) \psi_x = E\psi_x,$$

или

$$\frac{\hbar}{2\mu} \sqrt{\mu k} \psi_x = E\psi_x,$$

откуда находим

$$E = \frac{\sqrt{\mu k}}{2\mu} \hbar = \sqrt{\frac{k}{4\mu}} \hbar = \sqrt{\frac{k}{2M}} \hbar.$$

б) Введем обозначение  $y^2 = \sqrt{\mu k} x^2/\hbar$ . Поскольку волновая функция для основного состояния системы записывается в виде

$$\psi_x = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right),$$

то

$$\begin{aligned} |\langle P_x \rangle| &= \left| \left\langle \psi_x, \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi_x \right\rangle / \langle \psi_x, \psi_x \rangle \right| = \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-y^2} y \frac{(\mu k \hbar^2)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} dy = \frac{\sqrt{\hbar} \sqrt{\mu k}}{\sqrt{\pi}} 2 \int_0^\infty e^{-y^2} y dy = \frac{\sqrt{\hbar} \sqrt{\mu k}}{\sqrt{\pi}}; \end{aligned}$$

здесь мы учли, что

$$\int_0^\infty e^{-y^2} (2y dy) = \int_0^\infty e^{-z} dz = 1,$$

$$a \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/2; dy/dx = (\mu k/\hbar^2)^{1/4}.$$

в) Пусть  $\psi(p)$  — волновая функция в  $p$ -представлении. Она связана с  $\psi_x$  посредством преобразования Фурье

$$\psi(p) = \int_0^\infty e^{ipx/\hbar} e^{-ax^2} dx;$$

здесь  $a = \sqrt{\mu k}/2\hbar$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \int_0^\infty \exp\left[-a\left(x + \frac{ip}{2\hbar a}\right)^2 - a\left(\frac{ip}{2\hbar a}\right)^2\right] dx \sim \exp\left(-\frac{p^2}{4\hbar^2 a}\right) \sim \\ &\sim \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar \sqrt{\mu k}}\right). \end{aligned}$$

Вероятность того, что импульс частицы примет значение  $p < \sqrt{\hbar} \sqrt{2Mk} = p_0$ , дается выражением

$$\int_{p_0}^{\infty} \psi^2(p) dp / \int_0^\infty \psi^2(p) dp = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q_0} e^{-q^2} dq \equiv \Phi(q_0),$$

где  $\Phi(q_0)$  — функция ошибок. Подставляя сюда

$$q_0 = \frac{p_0}{\sqrt{2\hbar} \sqrt{\mu k}} = \frac{\sqrt{\hbar} \sqrt{2Mk}}{\sqrt{2\hbar} \sqrt{\mu k}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2M}}}{\sqrt{2} \sqrt{\mu}} = \frac{\sqrt{\sqrt{4\mu}}}{\sqrt{2} \sqrt{\mu}} = 1,$$

находим, что искомая вероятность равна

$$\Phi(1) = 0,84.$$

**IV. 12.2.**

а) Пусть  $\psi_{\text{пад}} = e^{ikz}$  и  $\psi_{\text{расс}} = f(\theta) e^{ikr}/r$ . Тогда мы можем записать

$$J_{\text{пад}} = \left\langle \psi_{\text{пад}}, \frac{P_z}{m} \psi_{\text{пад}} \right\rangle = \left\langle \psi_{\text{пад}}, \frac{\hbar}{im} \frac{d}{dz} \psi_{\text{пад}} \right\rangle = \frac{\hbar k}{m}.$$

Если же использовать для  $J$  известное выражение, антисимметризованное относительно  $\psi_{\text{пад}}$  и  $\bar{\psi}_{\text{пад}}$ , то

$$\begin{aligned} J_{\text{пад}} &= \frac{\hbar}{2im} \left[ \bar{\psi}_{\text{пад}} \left( \frac{\partial}{\partial z} \psi_{\text{пад}} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial z} \bar{\psi}_{\text{пад}} \right) \psi_{\text{пад}} \right] = \\ &= \frac{\hbar}{2im} \left[ (ik) e^{-ikz} e^{ikz} - (-ik) e^{-ikz} e^{ikz} \right] = \frac{\hbar}{2im} 2ik = \frac{\hbar k}{m} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} J_{\text{расс}} &= \frac{\hbar}{2im} \left[ \bar{\psi}_{\text{расс}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{расс}} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial r} \bar{\psi}_{\text{расс}} \right) \psi_{\text{расс}} \right] = \\ &= \frac{\hbar}{im} \left[ f^*(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} ik f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] = \frac{\hbar k}{m} \left( \frac{|f(\theta)|}{r} \right)^2. \end{aligned}$$

б) По определению дифференциального сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{r^2 J_{\text{расс}}}{J_{\text{пад}}} = |f(\theta)|^2.$$

**IV. 12.3.** Прежде всего следует уточнить положения максимума и минимума кривой и поведение кривой между ними. Поэтому следует произвести измерения при следующих значениях  $E$ : 5,5, 6,25, 6,5, 6,75 и 7,5. Представляет интерес также исследовать асимптотическое поведение кривой при  $E \gg 13$ . Если обработка результатов измерений  $\sigma$  занимает немного времени, то можно вначале произвести три измерения: при  $E_1 = 5,5$ ,  $E_2 = 6,5$  и  $E_3 = 7,5$ , а затем, используя полученные новые данные, определить подходящие значения  $E$  для оставшихся двух измерений. Здесь следует стремиться к тому, чтобы получить максимальную информацию о характере кривой в тех областях, где ее поведение отклоняется от монотонного. Например, если  $\sigma(E_i)$  сильно отличается от  $1/2[\sigma(E_i + 0,5) + \sigma(E_i - 0,5)]$ , где  $i = 1, 2$  или 3, то нужно произвести дополнительные измерения в точках  $E_i \pm 0,25$ .

**IV. 12.4.** Вероятность отсчета  $n$  импульсов в секунду подчиняется нормальному (гауссову) закону распределения

$$P(n) = \frac{1}{\Delta n \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(n - N)^2}{2 \Delta n^2} \right];$$

здесь  $\Delta n$  — среднеквадратичное отклонение  $n$ , а  $N$  — среднее число отсчетов,

При  $N \gg 1$  имеем  $\Delta n \approx \sqrt{N}$ . Вероятность того, что счетчик зарегистрирует  $n < 9700$  импульсов, определяется по формуле

$$P(n < 9700) = \frac{1}{\Delta n \sqrt{2\pi}} \int_0^{9700} \exp\left[-\frac{(n-N)^2}{2\Delta n^2}\right] dn \approx \\ \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} \exp(-x^2) dx \approx 0,0015.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$x = \frac{n - N}{\sqrt{2\Delta n}} = \frac{n - 10\,000}{141,4}$$

и

$$x_0 = \frac{9700 - N}{\sqrt{2\Delta n}} = \frac{-300}{141,4} \approx -2,13.$$

**IV. 12.5.** Вероятность распада атома, отнесенная к единице времени, в момент  $t$  равна

$$P(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{1}{\tau} \times \begin{matrix} \text{Вероятность существования атома} \\ \text{после момента времени } t \end{matrix}$$

где  $\tau$  — среднее время жизни элемента, равное 10 дням. Вероятность распада атома в течение пятого дня составляет

$$\hat{P} = \int_4^5 P(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_4^5 e^{-t/\tau} dt = -e^{-t/\tau} \Big|_{t=4}^{t=5} = \\ = e^{-0,4} - e^{-0,5} = 0,670 - 0,606 = 0,064.$$

**IV. 12.6.** Для преодоления столь огромного расстояния нейtron должен двигаться со скоростью, близкой к скорости света, и поэтому обладать очень большой энергией. Чтобы достигнуть Земли, ему отведено время  $t = 10$  лет, или около  $\pi \cdot 10^8$  с. Согласно условию задачи, только половина нейтронов должна «выжить» к концу этого пути; отсюда мы получаем, что время, затрачиваемое нейтроном в его собственной системе отсчета на покрытие данного расстояния, должно быть равно периоду полу-распада нейтрона, т. е.  $t_0 = 12$  мин. Применяя соотношение

$$\gamma \equiv \frac{E_n}{m_n c^2} = \frac{t}{t_0},$$

где  $t$  — время, измеряемое на Земле, находим

$$E_n = \gamma (m_n c^2) = \frac{t}{t_0} m_n c^2 = \frac{\pi \cdot 10^8}{12 \cdot 60} m_n c^2 \approx (4,4 \cdot 10^5) m_n c^2 \approx \\ \approx (4,4 \cdot 10^5) (940 \text{ МэВ}) \approx 4 \cdot 10^8 \text{ МэВ.}$$

**IV. 12.7.** Пусть  $L\hbar$  — момент относительного импульса обоих пионов. Четность системы равна  $(-1)^L$ . Пионы подчиняются статистике Бозе, так что система из двух пионов должна находиться в четном состоянии<sup>1)</sup>). Следовательно,  $L$  четно для двух таких бесспиновых частиц, как пионы. Значит,  $S_K = L$  четно.

#### IV. 12.8.

а) В случае трех зарядов минимальной энергии соответствует расположение зарядов в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $\sqrt{3} R$ .

б) В случае четырех зарядов минимальной энергии соответствует расположение зарядов в вершинах правильного тетраэдра с ребром  $2R/\sqrt{3}$ .

При таких конфигурациях заряды разнесены на максимально возможные расстояния друг от друга, а сами состояния симметричны относительно перестановки любых двух зарядов.

#### IV. 12.9.

$$\frac{Zze^2}{R} = \frac{90 \cdot 2 \cdot (4,8 \cdot 10^{-10})^2}{(1,3 \cdot 10^{-13}) \cdot 6 \cdot (1,6 \cdot 10^{-6})} \approx 30 \text{ МэВ};$$

здесь использована подстановка

$$R \approx \sqrt[3]{238} (1,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}) \approx 6 \cdot 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

#### IV. 12.10. Из условия равенства сил

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

имеем

$$GM = v^2 r.$$

Применяя квантовый постулат Бора, находим

$$v = \frac{n\hbar}{mr}.$$

Таким образом,

$$GM = v^2 r = \left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2 r = \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 r}.$$

Отсюда при  $n = 1$  получаем

$$\begin{aligned} r = a &= \frac{n^2 \hbar^2}{GMm^2} = \frac{1}{GMm} \left(\frac{\hbar^2}{m}\right) = \frac{1}{GMm} (e^2 a_0) = \frac{(e/m)^2}{GM/m} a_0 = \\ &= \frac{(4,8 \cdot 10^{-10})^2}{(6,7 \cdot 10^{-8}) \cdot 1840 \cdot (9,1 \cdot 10^{-28})^2} a_0 \approx 0,24 \cdot 10^{40} a_0 \approx 1,2 \cdot 10^{31} \text{ см} \end{aligned}$$

(здесь  $a_0 = 5 \cdot 10^{-9}$  см).

<sup>1)</sup> Здесь не учитывается, что пионы — псевдоскалярные поля. — Прим. ред.

**IV. 12.11.** Радиус  $K$ -оболочки обратно пропорционален  $Z$ .

**IV. 12.12.** На уровнях с  $n = 3$ ,  $l = 1$  и  $n = 2$ ,  $l = 1$ ,

$$\text{IV. 12.13. } \sum_{l=0}^4 2(2l+1) = 50.$$

**IV. 12.14.** Согласно статистике Ферми, волновая функция системы фермион — антифермион должна быть антисимметричной. Поэтому  $(-1)^{l+s+1} = -1$ , т. е. сумма  $l + s$  должна быть четной (см. задачу IV. 7.3). Отсюда при  $l = 1$  получаем  $s = 1$ , т. е. спины электрона и позитрона имеют одинаковую ориентацию. Поскольку заряды электрона и позитрона противоположны по знаку, то магнитные моменты обеих частиц антипараллельны, и суммарный магнитный момент системы равен нулю.

**IV. 12.15.**  $\pm^{1/2}$ ,  $\pm^{1/2}$ ,  $\pm^{1/2}$ ,  ${}^3/4$ .

**IV. 12.16.**  $\pm \frac{e\hbar}{2mc} B$ .

**IV. 12.17.**  $p = mc/2$ .

**IV. 12.18.** При  $hv \gg \alpha^2 m_e c^2$ , где  $(1/2)\alpha^2 m_e c^2 = 13,6$  эВ — энергия связи.

**IV. 12.19.** В квантовой механике значению  $l=0$  соответствует симметричное состояние. В полуклассической теории значение  $l = 0$  исключается, а значению  $l = 1$  соответствует круговая орбита (модель Зоммерфельда).

**IV. 12.20.** 4 · 13,6 эВ.

**IV. 12.21.** Комptonовское рассеяние и фотоэффект.