

IV. АТОМНАЯ ФИЗИКА И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

ЗАДАЧИ

IV. 1.1 (20 баллов).

- Почему при резерфордовском рассеянии α -частиц в тонкой золотой фольге пренебрегают влиянием электронов атома на α -частицу?
- Объясните, почему при комптоновском рассеянии рентгеновских лучей не учитывают влияния ядер атомов.

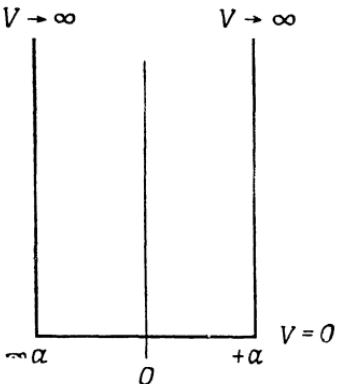
IV. 1.2 (20 баллов). Оцените магнитное поле, действующее на протон в атоме водорода со стороны электрона, находящегося в состоянии $2p$.

IV. 1.3 (20 баллов). Ртутная лампа излучает 10^{18} фотонов в секунду на спектральной линии 2537 \AA . Полагая, что плотность паров ртути в лампе мала и они находятся в тепловом равновесии при температуре $T = 300 \text{ K}$, вычислите доплеровское уширение спектральной линии. Оцените ее естественную ширину. Какова мощность излучения лампы на этой спектральной линии?

IV. 1.4 (20 баллов). Калий — щелочной металл с атомным номером $Z = 19$.

- Какова конфигурация электронных оболочек этого атома в основном состоянии?
- Какие квантовые числа L, S и J характеризуют основное состояние атома калия?
- Опишите количественно зеемановское расщепление уровней атома, находящегося в основном и первом возбужденном состояниях.

IV. 1.5 (20 баллов). Рассмотрим прямоугольную потенциальную яму с бесконечно высокими стенками и шириной $2a$, как показано на рисунке



Волновая функция частицы, находящейся в этой потенциальной яме, записывается в виде

$$\psi = C \left(\cos \frac{\pi x}{2a} + \sin \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\pi x}{2a} \right) \quad (\text{внутри потенциальной ямы}),$$

$$\psi = 0 \quad (\text{вне потенциальной ямы}).$$

а) Вычислите коэффициент C .

б) Какие значения можно получить при измерении полной энергии частицы и какова вероятность появления каждого из этих значений?

IV. 2.1 (15 баллов). Дайте числовые значения следующих физических постоянных (в общепринятых единицах):

- а) массы нейтрона m_n ,
- б) постоянной Планка \hbar ,
- в) постоянной тонкой структуры α ,
- г) комптоновской длины волны электрона λ_e ,
- д) классического радиуса электрона r_0 ,
- е) времени жизни атома водорода в возбужденном $2p$ -состоянии,
- ж) магнитного момента протона μ_p ,
- з) времени жизни свободного нейтрона τ ,
- и) скорости электрона на первой боровской орбите v .

Ответы на п. «в», «г» и «д» выразите через фундаментальные постоянные e , \hbar , m_e и c .

IV. 2.2 (25 баллов).

а) Одномерное движение частицы массой m в поле с потенциалом $V(x)$ описывается стационарным уравнением Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

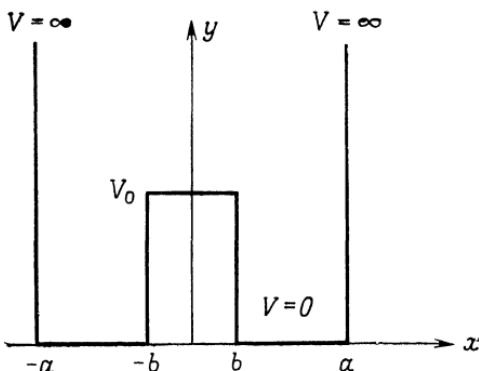
Предполагая $V(x) = V(-x)$, а решение $\psi(x)$ невырожденным, докажите, что $\psi(x)$ имеет определенную четность, т. е. что

$$\psi(x) = +\psi(-x) — \text{четная функция}$$

или

$$\psi(x) = -\psi(-x) — \text{нечетная функция}.$$

б) Рассмотрите движение частицы в потенциальном поле, показанном на следующем рисунке:



Постройте приближенную картину решений стационарного уравнения Шредингера, соответствующих двум самым низким собственным значениям энергии частицы в данном потенциальном поле. Обозначьте полученные решения через ψ_1 и ψ_2 , а соответствующие им энергии через E_1 и E_2 .

в) Частное решение полного уравнения Шредингера для приведенного выше потенциального поля можно представить в виде суперпозиции функций

$$\psi_1 e^{-i(E_1/\hbar)t} \quad \text{и} \quad \psi_2 e^{-i(E_2/\hbar)t}.$$

Получите волновой пакет ψ , который в момент времени $t = 0$ сосредоточен (почти) полностью в левой потенциальной яме. Опишите подробно дальнейшее движение пакета во времени.

IV. 2.3 (20 баллов). Позитрон имеет ту же массу, что и электрон, но положительный заряд и противоположный спиновый магнитный момент. Если в атоме водорода заменить протон позитроном, то получится атом позитрония.

- Атом позитрония в основном состоянии имеет два очень близко расположенных энергетических уровня 1S_0 и 3S_1 . Какой из них расположен ниже?
- Какова энергия связи электрона в атоме позитрония в основном состоянии?
- Предположим, что атом позитрония покоятся и, находясь в состоянии 1S_0 , аннигилирует с образованием двух γ -квантов. Определите энергию γ -квантов и относительные направления их разлета.

IV. 2.4 (15 баллов).

а) Вычислите значение матричного элемента

$$\langle l', m' | [L_+, L_-] | l, m \rangle.$$

б) Докажите, что

$$e^{i\sigma_y \theta/2} = \cos(\theta/2) + i\sigma_y \sin(\theta/2).$$

IV. 2.5 (25 баллов). На какую величину сдвинется энергетический уровень $1S$ атома водорода, если представить заряд протона не точечным, а равномерно распределенным по сферической оболочке радиусом 10^{-13} см? Воспользуйтесь первым приближением теории возмущений.

IV. 3.1 (5 баллов). Предположим, что заряд протона оказался вдвое большим. С каким зарядовым числом Z и массовым числом A существовало бы наиболее тяжелое устойчивое ядро?

IV. 3.2 (5 баллов). Оцените порядок величины магнитного поля, в котором обычное ядро вместо эффекта Зеемана давало бы эффект Пашена — Бака? (Такой эффект никогда не наблюдался.)

IV. 3.3 (5 баллов). Какой минимальной кинетической энергией должен обладать протон, чтобы при его столкновении с тяжелым ядром образовался антинейтрон?

IV. 3.4 (5 баллов). Попадая в вещество, отрицательно заряженные мюоны очень быстро втягиваются на боровские орбиты вокруг ядер, а затем постепенно захватываются протонами атомных ядер (K -захват). Эта картина очень напоминает процесс β -распада, только протекающий в обратном порядке. Вероятность такого захвата в различных веществах довольно точно подчиняется следующему закону:

$$\text{Вероятность захвата мюона} = \text{const} \cdot Z^p.$$

Объясните, почему в этом законе показатель степени p должен быть равен 4.

IV. 3.5 (5 баллов). До какого значения энергии протонов их рассеяние на нейтронах можно считать изогропным?

IV. 3.6 (15 баллов). Определите (без подробных вычислений) энергетические уровни частицы массой m , движущейся в одномерном потенциальном поле

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ +\frac{m\omega^2 x^2}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

IV. 3.7 (5 баллов). Перечислите известные вам точные симметрии (законы сохранения). Приведите примеры приближенных симметрий.

IV. 3.8 (5 баллов). Имеется мезон, который может распадаться двумя возможными путями с образованием различных продуктов распада. Оба процесса характеризуются временами распада t_1 и t_2 . Напишите формулу для неопределенности массы этого мезона.

IV. 3.9 (5 баллов). Каковы фазовая и групповая скорости волны де Броиля у свободного электрона, движущегося со скоростью V , определяемой по классической теории?

IV. 3.10 (10 баллов). Укажите, в каких областях трехмерного конфигурационного пространства волновая функция ψ должна обращаться в нуль для каждого из перечисленных ниже энергетических состояний атома водорода:

- а) $1s$ -состояние,
- б) $2s$ -состояние,
- в) $2p$ -состояние (в этом случае рассмотрите отдельно каждое из возможных состояний).

IV. 3.11 (10 баллов). Напишите простейшую формулу для энергии связи электрона, находящегося на K -оболочке, с ядром атома, имеющим заряд Z . Рассмотрите, как изменится (увеличится или уменьшится) эта энергия связи, если учесть

- а) релятивистскую поправку,
- б) эффект экранировки центрального поля остальными электронами,
- в) конечный размер ядра.

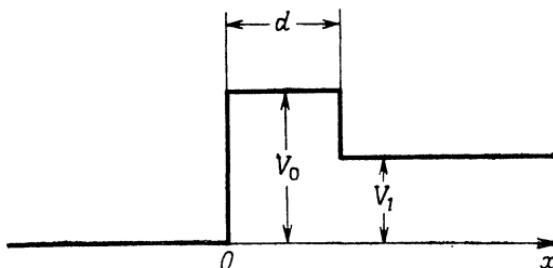
IV. 3.12 (10 баллов). Найдите зависимость (с точностью до знака) потенциальной энергии взаимодействия двух частиц от расстояния r между ними (r велико) для следующих конкретных случаев:

- а) два нейтральных атома,
- б) два ионизованных атома,
- в) один нейтральный атом и один ион,
- г) два нейтрона (учтите только ядерные силы),
- д) два нейтрона (с учетом электромагнитных сил).

IV. 3.13 (15 баллов). Рассмотрим квантовомеханическую модель — однородную сферу, которая может свободно вращаться относительно своего центра. Предположим, что центр сферы совпадает с началом координат. Поскольку точки на поверхности сферы не отличны друг от друга, квадрат модуля волновой функции $|\psi(\theta, \varphi)|^2$ не зависит от углов θ и φ . Определите воз-

можные значения момента импульса сферы и покажите, как вы их получили.

IV. 4.1 (15 баллов). Одномерный потенциальный барьер имеет следующую форму:



Определите коэффициент прозрачности этого барьера для частиц массой m , движущихся к нему слева с энергией E ($V_1 < E < V_0$).

IV. 4.2 (5 баллов). Найдите собственные значения и нормированные собственные векторы следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV. 4.3 (20 баллов). Предположим, что ψ является собственной функцией уравнения Шредингера для одной частицы. Введем в рассмотрение вектор \mathbf{C} , удовлетворяющий соотношению

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \psi^* \psi dV \right) = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{C}) dV.$$

- Какой физический смысл имеет вектор \mathbf{C} ?
- Найдите выражение для \mathbf{C} в явном виде.

IV. 4.4 (20 баллов).

- Напишите волновую функцию для атома водорода в основном состоянии.
- Получите выражение для вероятности найти частицу (электрон) в шаровом слое между r и $r + dr$.
- При каком значении r эта вероятность максимальна?

IV. 4.5 (20 баллов). Дайте числовые значения (не более чем в трехкратной ошибкой) следующих физических величин:

- расстояния между ядрами атомов в молекуле водорода;
- длины волны, соответствующей максимуму спектральной плотности излучения абсолютно черного тела при температуре 3 K;

- в) ширины запрещенной зоны, расположенной между валентной зоной и зоной проводимости, в чистом кристалле германия;
- г) энергии, выделяемой при делении одного ядра урана-235;
- д) частоты излучения в красной области спектра;
- е) интервала времени, в течение которого свет проходит расстояние, равное диаметру одного протона;
- ж) магнитного момента свободного электрона.

IV. 4.6 (20 баллов). Частица массой m находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме с очень высокими («бесконечными») стенками, разделенными промежутком длиной a . Стенки ямы мгновенно и симметрично раздвигаются до расстояния $2a$.

- а) Какова вероятность того, что частица в этой расширенной системе находится в основном состоянии?
- б) Сохранится ли энергия частицы в результате раздвижения стенок?

IV. 5.1 (20 баллов). Кратко объясните:

- а) Что такое принцип соответствия?
- б) Что представляет собой закон Дюлонга и Пти?
- в) Почему в спектрах поглощения щелочных металлов наблюдается только главная серия?
- г) Почему g -фактор Ланде для всех синглетных уровней равен 1, а для всех S -уровней равен 2?
- д) Назовите два экспериментальных факта, непосредственно подтверждающих корпускулярную природу электромагнитного излучения.

IV. 5.2 (20 баллов). Мю-мезон (мюон) и протон образуют водородоподобный атом. Масса мю-мезона в 210 раз превышает массу электрона.

- а) Какой энергией обладает фотон, испускаемый таким атомом при переходе из первого возбужденного состояния в основное?
- б) Чему равен радиус первой боровской орбиты у такого атома?
- в) Какова скорость мю-мезона на n -й боровской орбите? n — главное квантовое число.

IV. 5.3 (20 баллов). Студенты, проходящие химический практикум, определяют присутствие малых примесей натрия в образце по характерному желтому окрашиванию (линия 5890 Å) пламени бунзеновской горелки, в котором сжигается образец. Этот эффект может показаться необъяснимым, так как темпера-

тура пламени сравнительно невелика (2000 К). Проведите количественный расчет и покажите, что здесь нет ничего странного.

IV. 5.4 (20 баллов). Частица движется в одномерном потенциальном поле

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ V_0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Предположим, что она обладает энергией $E > V_0$ и движется слева направо.

- а) Определите волновую функцию частицы. Нормировать ее не нужно.
- б) Произведите нормировку волновой функции таким образом, чтобы она соответствовала единичному потоку движущихся частиц (одна частица в одну секунду).
- в) Решите задачу «а» для случая $E < V_0$ и сделайте вывод из полученного результата.

IV. 5.5 (20 баллов). Состояние частицы массой m характеризуется (ненормированной) волновой функцией

$$\psi_k(r) = \frac{e^{-ikr} + be^{ikr}}{r},$$

где r — расстояние от начала координат.

- а) Чему равна энергия частицы?
- б) Является ли эта частица свободной? Если нет, то опишите, по возможности, потенциальное поле, в котором она находится.

IV. 6.1 (15 баллов).

- а) В уравнения электродинамики входит уравнение непрерывности, которое связывает изменение плотности заряда во времени с дивергенцией плотности тока. Используйте аналогичное уравнение квантовой механики для того, чтобы получить выражение для потока вероятности в нерелятивистском случае.
- б) Вычислите поток вероятности для ненормированной волновой функции $\psi = e^{-ikx}$.
- в) Применимо ли понятие потока к действительной волновой функции?

IV. 6.2 (20 баллов). На лестнице стоит мальчик и с высоты H роняет вниз маленькие шарики массой m . Представим себе, что он целится идеально точно. Используя принцип неопределенности, оцените средний разброс шариков около мишени.

IV. 6.3 (20 баллов). Согласно закону Мозли, частота линии K_{α} рентгеновского излучения v зависит от атомного номера элемента Z следующим образом:

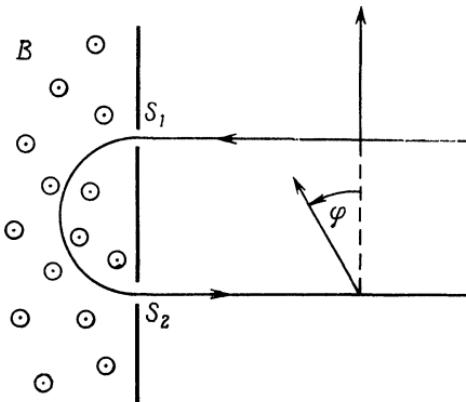
$$\sqrt{v} = aZ - b.$$

а) Выразите приближенно коэффициент a через фундаментальные физические постоянные.

б) Объясните, почему частоты спектральных линий рентгеновского излучения изменяются от элемента к элементу в соответствии с таким простым законом, а частоты линий оптических спектров описываются более сложно.

IV. 6.4 (10 баллов). Частица с массой покоя m_1 налетает со скоростью v на покоящуюся частицу массой m_2 и поглощается ею. Определите массу покоя M и скорость V образованвшейся частицы.

IV. 6.5 (15 баллов). Электроны влетают через щель S_1 в область с однородным магнитным полем B и, описав в этой области полуокружность, покидают ее через щель S_2 . При входе в эту область спины электронов ориентированы вверх ($\phi = 0$). как показано на рисунке. Магнитный момент электронов $\mu = -(eg/2m_e c)s$, где фактор $g = 2 + \alpha/\pi$ (здесь α — постоянная тонкой структуры).



а) Определите частоту, с которой прецессирует спин электронов.

б) Вычислите циклотронную частоту электронов.

в) Под каким углом ϕ к первоначальному направлению ориентированы спины электронов при выходе из области с магнитным полем?

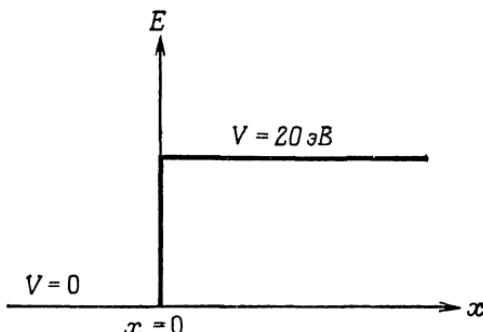
Замечание. Можно доказать, что квантовомеханическое выражение для изменения среднего значения спина электрона во вре-

мени аналогично выражению из классической динамики. Следовательно, здесь может быть полностью оправдан классический подход к решению задачи, и его нужно использовать.

IV. 6.6 (20 баллов).

- Используя классические формулы для кинетической и потенциальной энергий электронно-протонной системы и квантовый постулат Бора, получите выражение для энергии уровней в атоме водорода.
- Оцените разность энергий между четвертым и вторым уровнями.

IV. 7.1 (20 баллов). Электрон движется параллельно оси x слева направо в потенциальном поле $V = 0$ в области $x < 0$ и $V = 20$ эВ в области $x > 0$ (см. рисунок).



Кинетическая энергия электрона при $x = -\infty$ равна 10 эВ. Будем рассматривать движение электрона как одномерную плоскую волну.

- Напишите уравнение Шредингера для областей $x < 0$ и $x > 0$;
- постройте на графике решения этого уравнения для обеих областей;
- чему равна дебройлевская длина волны электрона (в сантиметрах) при $x < 0$?
- найдите граничные условия при $x = 0$;
- что можно сказать о вероятности нахождения электрона вблизи некоторого положительного значения координаты x ?

IV. 7.2 (20 баллов).

- Рассмотрим одномерный гармонический осциллятор с характеристической частотой v_0 . Каковы собственное значение энергии и четность собственного состояния, соответствующие квантовому числу n ?
Какие значения может принимать n ?

б) Волновую функцию трехмерного гармонического осциллятора можно записать в виде произведения трех собственных функций одномерного гармонического осциллятора, каждая из которых зависит от определенной декартовой координаты и соответствует квантовому числу n_x , n_y или n_z . Найдите энергию, четность и кратность вырождения четырех самых низких *отдельных групп* энергетических уровней.

в) Задачу о трехмерном гармоническом осцилляторе можно решить и в сферических координатах. Несмотря на использование других собственных функций, собственные значения энергии окажутся *теми же самыми*. На основе своих знаний о четности и вырождении различных состояний установите, какому значению орбитального квантового числа l соответствует каждая группа уровней, о которых говорилось в п. «б».

IV. 7.3 (20 баллов). Свободный атом углерода имеет четыре электрона в s -состояниях и два электрона в p -состояниях.

а) Определите, пользуясь принципом Паули, число разрешенных состояний для последней пары электронов.

б) В предположении LS-связи квантовые числа для суммарного полного момента \mathbf{J} , суммарного орбитального момента $L^2 = (l_1 + l_2)^2$ и суммарного спинового момента $S^2 = (s_1 + s_2)^2$ получаются «хорошими»¹⁾. Определите наборы квантовых чисел J , L и S для p -состояний обоих электронов и вычислите их мультиплетность.

в) Сложите мультиплетности термов, найденных в п. «б», и *убедитесь*, что полученный результат в точности совпадает с полученным в п. «а».

IV. 7.4 (20 баллов). Атомный номер натрия равен 11.

а) Какова электронная конфигурация этого атома в основном состоянии? (Используйте стандартное символическое обозначение, которое показывает распределение электронов атома по различным состояниям.)

б) Обозначьте основное состояние атома, как принято в спектроскопии. (Примером может служить обозначение 5^3F_2 .)

в) Самая низкочастотная линия в спектре поглощения натрия представляет собой дублет. Какие спектроскопические обозначения следует приписать соответствующей па-

¹⁾ «Хорошими» квантовыми числами называют те, которые определяют точно (или в некотором достаточно точном для рассматриваемой ситуации приближении) сохраняющиеся величины. — Прим. ред.

ре возбужденных энергетических уровней, на которые переходит атом в процессе поглощения.

г) Чем можно объяснить расщепление на эти два энергетических уровня?

д) Суммарный полный момент атома J различен для этих двух уровней. Выше или ниже расположен уровень, соответствующий большему значению J ?

е) Рассматриваемое расщепление на два уровня пропорционально средней величине r^n , где r — расстояние между валентным электроном и ядром атома. Вычислите наиболее простым путем значение n .

IV. 7.5 (20 баллов).

а) Выпишите все перестановочные соотношения для операторов момента импульса L_x , L_y , L_z и оператора L^2 .

б) Пусть ψ_{lm} — собственная функция операторов L^2 и L_z , отвечающая их собственным значениям $\hbar^2 l(l+1)$ и $\hbar m$ соответственно. Докажите, что $\Phi = (L_x + iL_y)\psi_{lm}$ также является собственной функцией операторов L^2 и L_z , и найдите их собственные значения.

в) Покажите, что в случае $l = 0$ функция ψ_{lm} , рассматриваемая в п. «б», является также собственной функцией операторов L_x и L_y .

IV. 8.1 (15 баллов). Определев квантовые числа S , L и J , запишите в принятых спектроскопических обозначениях следующие состояния атомов:

а) основное состояние нейтрального атома бора (атомный номер $Z = 5$),

б) основное состояние однократно ионизованного атома натрия ($Z = 11$),

в) основное состояние двукратно ионизированного атома натрия,

г) первое возбужденное состояние однократно ионизованного атома натрия,

д) основное состояние молекулы водорода.

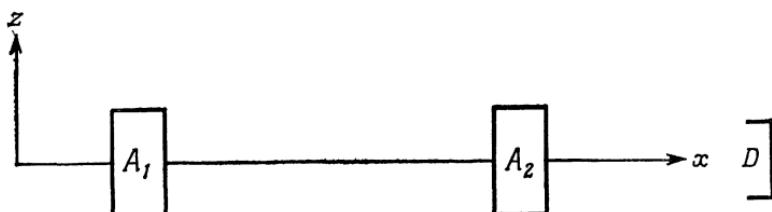
IV. 8.2 (10 баллов). Частица массой m находится в основном состоянии с энергией $E = -B$ в одномерной потенциальной яме шириной a . В решение уравнения Шредингера входят два параметра, имеющие размерность длины:

$$d_1 = a \quad \text{и} \quad d_2 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mB}}.$$

Ответьте качественно на следующий вопрос: до какого расстояния x можно считать отличной от нуля плотность вероятности

для этой частицы? Для иллюстрации ваших результатов постройте график волновой функции.

IV.8.3 (10 баллов). На рисунке представлена система из двух магнитов A_1 и A_2 ; каждый из них аналогичен магнитам, используемым в опытах Штерна и Герлаха. Через такую систему проходят атомы только в состояниях с $S_z = +\frac{1}{2}$ (имеются в виду атомы калия, узкий пучок которых падает слева). Представим теперь, что между магнитами A_1 и A_2 на пучок атомов в течение одной микросекунды воздействует пространственно однородное магнитное поле \mathbf{B} . Каковы должны быть величина и направление поля \mathbf{B} , чтобы ни один атом из этого пучка не попал на детектор D ?



IV.8.4 (10 баллов). Оцените приближенно время жизни τ атома водорода в возбужденном $2p$ -состоянии. Принимая во внимание принцип неопределенности, мы могли бы сказать, что энергетический уровень этого состояния имеет ширину¹⁾ $\Delta E \approx \approx \hbar/\tau$. Однако в известной серии опытов, проведенных более двадцати лет назад, Лэмб и его сотрудники измерили энергию этого уровня с погрешностью примерно в тысячу раз меньшей, чем ΔE . Объясните этот парадокс.

IV.8.5 (15 баллов). Приведите формулы и числовые значения в сантиметрах (с точностью до одной значащей цифры) для

- радиуса первой боровской орбиты в атоме водорода,
- радиуса первой боровской орбиты в атоме ртути,
- комптоновской длины волны электрона,
- комптоновской длины волны пи-мезона,
- дебройлевской длины волны нейтрона с энергией 10 кэВ,
- дебройлевской длины волны протона с энергией 10 ГэВ,
- комптоновской длины волны нейтрино (с указанием типов нейтрино),
- радиуса наиболее тяжелого устойчивого ядра.

¹⁾ Здесь τ обозначает среднее время пребывания атома в возбужденном нестабильном состоянии, переход из которого является разрешенным. — Прим. ред.

IV. 8.6 (10 баллов).

- а) Докажите, что для любого стационарного состояния квантовое среднее значение импульса \mathbf{p} должно равняться нулю.
 б) При каких условиях можно доказать, что квантовое среднее значение оператора положения \mathbf{r} обращается в нуль?

IV. 8.7 (10 баллов).

- а) Установите правила отбора для электрических дипольных переходов в атомах легких элементов.
 б) Какие из них остаются в силе для тяжелых элементов?
 в) для ядер?

IV. 8.8 (10 баллов). Расщепление линий в сверхтонкой структуре атома меньше расщепления в тонкой структуре примерно в m/MZ раз, где m — масса электрона, M — масса протона, а Z — атомный номер. Объясните, чем это вызвано.

IV. 8.9 (10 баллов). Рассмотрим функцию $f(x)$, определяемую степенным рядом вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^p},$$

где p — некоторое положительное целое число.

- а) Какое суждение можно вынести о скорости возрастания этой функции (по сравнению со степенной функцией) при $x \rightarrow +\infty$?
 б) Может ли эта функция служить решением какого-нибудь конкретного уравнения Шредингера, удовлетворяя одновременно условию нормировки

$$\int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1?$$

Дайте объяснение.

IV. 9.1 (5 баллов). В некотором циклотроне дейтероны ускоряются до энергии 16 МэВ. До какой энергии будут ускорены α -частицы в этом циклотроне, если заменить в нем дейтерий гелием?

IV. 9.2 (5 баллов). Какова плотность вещества в ядре атома в $\text{г}/\text{см}^3$?

IV. 9.3 (5 баллов). Протоны и α -частицы, обладающие одинаковыми кинетическими энергиями, проходят через золотую фольгу. Чему равно отношение их сечений кулоновского рассеяния (нерелятивистского)?

IV. 9.4 (5 баллов). Какая выделилась бы энергия (в джоулях), если бы метеор из анти вещества массой 1 кг столкнулся с Землей?

IV. 9.5 (5 баллов). Определите энергию основного состояния атома, образованного из электрона и позитрона, которые связаны между собой силами кулоновского притяжения.

IV. 9.6 (5 баллов). На сколько компонент расщепляется спектральная линия атома натрия, соответствующая переходу ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2D_{1/2}$ в случае нормального эффекта Зеемана?

IV. 9.7 (5 баллов). Частица массой m находится в потенциальной яме, имеющей форму полусферы радиусом R . Оцените приближенно кинетическую энергию частицы в основном состоянии. (Рассмотрите только нерелятивистский квантовый случай.)

IV. 9.8 (5 баллов). Определите границу коротковолнового рентгеновского излучения для трубки, находящейся под напряжением 25 кВ.

IV. 9.9 (5 баллов). Большое число идентичных фермионов находится в прямоугольном ящике объемом V , занимая низшие возможные уровни. Во сколько раз изменится максимальный импульс частиц, если удвоить объем ящика, а число частиц оставить неизменным?

IV. 9.10 (5 баллов). Укажите величину магнитного момента протона не более чем с двукратной ошибкой.

IV. 9.11 (5 баллов). Запишите в спектроскопических обозначениях основное состояние атома гелия.

IV. 9.12 (5 баллов). Пусть $\psi(r, t)$ — волновая функция частицы, движущейся в потенциальном поле $V = kr^2/2$. Рассмотрим другое состояние этой частицы с волновой функцией $\psi(\alpha r, t)$. Во сколько раз отличаются средние кинетическая и потенциальная энергии в этих двух случаях?

IV. 9.13 (10 баллов). Исходя из элементарной теории Бора:

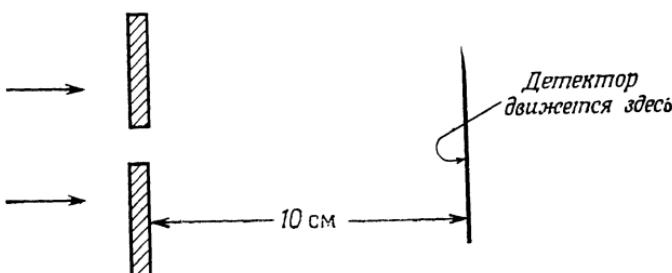
- вычислите магнитное поле в центре атома водорода, индуцированное электроном в основном состоянии;
- оцените для этого состояния сверхтонкое расщепление энергетического уровня¹⁾;
- вычислите частоту радиоизлучения атомарного водорода, распределенного в космосе (в пренебрежении магнитным моментом электрона).

IV. 9.14 (15 баллов). Рассмотрим атом, состоящий из двух протонов и одного электрона.

¹⁾ Без учета аномального магнитного момента протона. — Прим. ред.

- а) Предполагая, что расстояние R между протонами жестко зафиксировано и нам известна зависимость энергии электрона E_0 в основном состоянии от R , напишите выражения для $E_0(0)$ и $E_0(\infty)$ и оцените их численно.
- б) Теперь предположите, что оба протона взаимодействуют друг с другом, и их «эффективная потенциальная энергия» $V(R)$ равна сумме $E_0(R)$ и энергии электростатического отталкивания. Определите, как зависит расстояние R между протонами в состоянии равновесия от $E_0(R)$.
- в) Считая функцию $E_0(R)$ гладкой и монотонной в интервале между предельными значениями $E_0(0)$ и $E_0(\infty)$, постройте приближенно график зависимости $V(R)$.
- г) До сих пор мы не учитывали собственного движения протонов. Охарактеризуйте качественно природу нижних энергетических подуровней основного состояния электрона и нижних возбужденных состояний обоих протонов.

IV. 9.15 (15 баллов). Параллельный пучок электронов, ускоренных в поле с разностью потенциалов 37 В, падает нормально на экран, в котором имеется щель шириной 1 \AA (ясно, что такая щель нереальна и рассматривается абстрактная задача). За экраном, на расстоянии 10 см от него, перпендикулярно щели и направлению пучка перемещается детектор очень малых размеров ($\sim 1 \text{ \AA}$).



- а) Какова примерно ширина области, в которой детектор зарегистрирует электроны?
- б) Какое распределение электронов будет регистрировать детектор, если в экране сделать еще одну такую же щель, параллельную первой и отстоящую от нее на расстояние 10 \AA ? Нарисуйте это распределение.
- в) Предположим, что интенсивность электронного пучка уменьшилась настолько, что в любой момент времени в пространстве между экраном и плоскостью детектора имеется только один электрон. Произойдет ли изменение картины?

г) Какая наблюдалась бы картина, если бы одну из щелей перекрыли вторым (прозрачным для электронов) детектором, дающим нам информацию о том, через какую щель прошел каждый электрон?

IV. 10.1 (20 баллов).

а) Мюон — это частица с массой $206 m_e$, заряд которой равен заряду электрона. Предположим, что отрицательно заряженный мюон оказался захваченным атомом фосфора ($Z = 15$) и стал последовательно переходить на все более низкие энергетические уровни. Определите энергию фотона, испускаемого атомом, при переходе мюона с уровня $n = 3$ на уровень $n = 2$.

б) Для точного определения массы мюона можно использовать результаты прецизионного измерения энергии фотона, излучаемого так, как описано в п. «а». Случайно оказалось, что энергия фотона лежит примерно в середине длинноволновой границы K -полосы поглощения у свинца ($Z = 82$). Чтобы доказать, что данное утверждение справедливо, вычислите приближенно энергию, соответствующую границе K -полосы поглощения для свинца.

в) Как, используя этот факт, вы произвели бы точное измерение энергии фотона и почему упомянутый случайный факт можно отнести к разряду «счастливых»?

IV. 10.2 (25 баллов).

а) Исходя из выражения для мощности излучения ускоренно движущегося электрона

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} \text{ эрг/с},$$

получите формулу для сечения томсоновского рассеяния.

б) Опишите, какая существует связь между томсоновским и комптоновским рассеянием?

в) Считая, что γ -кванты с энергией 0,5 МэВ рассеиваются атомами водорода под углом 90° , вычислите энергию γ -квантов, рассеянных на электронах и протонах, а также оцените по порядку величины отношение их сечений рассеяния $(\gamma + e^-)/(\gamma + p)$.

IV. 10.3 (20 баллов). Напишите классическую формулу для мощности излучения ускоренно движущегося заряда (см. задачу IV. 10.2) и, применяя принцип соответствия, определите среднее время жизни простого гармонического осциллятора в возбужденном состоянии с высоко расположенными квантовыми уровнями энергии. Результат выразите через квантовое число

уровня n , классическую круговую частоту ω , массу m и заряд e осциллирующей частицы.

IV. 10.4 (20 баллов). Согласно одной из простых моделей, атомное ядро из N нейтронов и Z протонов рассматривается как совокупность нуклонов в бесконечно глубоком (квадратном) потенциальном ящике.

а) Получите выражение для плотности энергетических уровней (т. е. для числа уровней, приходящихся на единичный энергетический интервал) в таком потенциальном ящике.

б) Чему равна максимальная кинетическая энергия отдельного нуклона, если ядро атома находится на самом нижнем энергетическом уровне?

в) Покажите, что при постоянной плотности ядра найденная выше максимальная энергия не зависит от числа нуклонов.

г) Как следует изменить рассматриваемую модель, чтобы учесть электрическое взаимодействие между протонами?

IV. 10.5 (15 баллов). Парамагнитная соль титана подвергается действию магнитного поля $B = 10\,000$ Гс в гелиевом криостате при температуре 1 К. Вычислите приближенно, какая часть от общего числа ионов $Ti^{3+} [3d^1; ^2D_{5/2}]$ имеет ориентацию спина по направлению поля.

IV. 11.1 (20 баллов). Представьте себе метательное копье, которое, упираясь своим острием в неподвижную горизонтальную мраморную плиту, находится в «идеально сбалансированном» вертикальном положении. Используя принцип неопределенности, оцените время, через которое упадет это копье.

IV. 11.2 (20 баллов). В некоторых магнитных материалах могут существовать спиновые волны с частотой $\omega = Dk^2$, где D — постоянная, а k — волновое число (модуль волнового вектора), соответствующее данной спиновой волне. Энергетические уровни квантованы: $E = n\hbar\omega$.

а) Найдите зависимость фазовой v и групповой u скоростей этих волн от частоты ω .

б) Определите температурную зависимость интегральной по спектру плотности энергии U , связанной со спиновыми волнами, в состоянии теплового равновесия.

Замечание. Спиновые волны являются бозонами, энергия теплового движения которых описывается законом Планка для излучения абсолютно черного тела. Здесь так же, как и в теории свободного электронного газа, можно определить число частиц $N(k)$, у которых волновые числа попадают в интервал между k

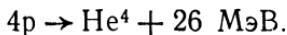
и $k + dk$ (только для спиновых волн не нужно писать множитель 2, учитывающий поляризацию, т. е. спиновые состояния электронов или, например, фотонов).

IV. 11.3 (20 баллов). Коротко опишите такие положения, рассматриваемые в квантовой механике, как

- физическая интерпретация волновой функции $\psi(x)$,
- правила векторного сложения моментов импульса,
- правила отбора, т. е. допустимые изменения квантовых чисел j , l и m для разрешенных излучательных электрических дипольных переходов,
- соотношение, налагаемое на динамические величины G и F , когда они одновременно могут иметь точно определенные значения.

IV. 11.4 (5 баллов). Оцените кинетическую энергию нуклона в ядре атома углерода. Диаметр ядра равен примерно 3×10^{-15} м.

IV. 11.5 (5 баллов). Мощность излучения Солнца (с учетом излучения нейтрино) равна $4 \cdot 10^{26}$ Вт. Предположим, что вся энергия выделяется в результате ядерной реакции, протекающей по протонно-протонному циклу:



Сколько рождается атомов гелия внутри Солнца в одну секунду?

IV. 11.6 (5 баллов). Какова (с точностью $\pm 30\%$) энергия фотонов в К-линиях характеристического рентгеновского спектра атома меди?

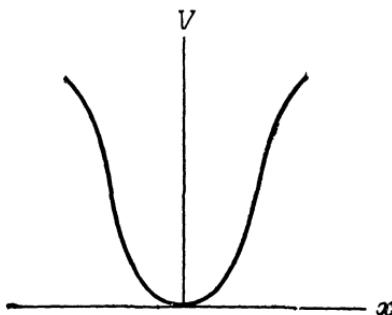
IV. 11.7 (5 баллов). Какой минимальной энергией должен обладать движущийся электрон, чтобы при его столкновении с другим покоящимся электроном образовалась пара электрон — позитрон:



IV. 11.8 (5 баллов). Атом с атомным номером $Z = 26$ часто проявляет валентность +2. Обозначьте символически конфигурацию электронных оболочек атома для этого случая. [Пример. Для кислорода она записывается в виде $(1s^2, 2s^2, 2p^4)^3P_2$.]

IV. 11.9 (5 баллов). Оцените зеемановское расщепление $\Delta\nu$ спектральных линий атома водорода в магнитном поле $B = 10\,000$ Гс.

IV. 11.10 (10 баллов). Частица движется в одномерной симметричной потенциальной яме вида



Укажите, как повлияют малые возмущения этого поля (они изображены ниже графически) на поведение частицы в различных состояниях:

- а) — в основном состоянии,
- б) — в первом возбужденном состоянии,
- в) — в основном состоянии.

Для краткости ответов введем следующие обозначения: *A* — если энергия состояния возрастет в первом приближении теории возмущений, *B* — если возрастет во втором приближении, *C* — если уменьшится в первом приближении, *D* — если уменьшится во втором приближении и *E* — если не изменится в обоих приближениях.

IV. 12.1 (20 баллов). Рассмотрим систему из двух частиц, имеющих одинаковые массы M . Пусть эти частицы совершают одномерное движение и взаимодействуют между собой с силой $F = -k(x_1 - x_2)$, где x_1 и x_2 — координаты частиц. Предположим, что состояние этой системы описывается волновой функцией

$$\psi = \exp\left[i \frac{P(x_1 + x_2)}{2\hbar}\right] \exp\left[-\frac{\sqrt{Mk/2}(x_1 - x_2)^2}{2\hbar}\right].$$

- а) Чему равно среднее значение полной энергии относительного движения частиц?
- б) Определите среднее значение модуля импульса относительного движения этих частиц.

в) Если измерить относительный импульс p , то с какой вероятностью можно получить значение

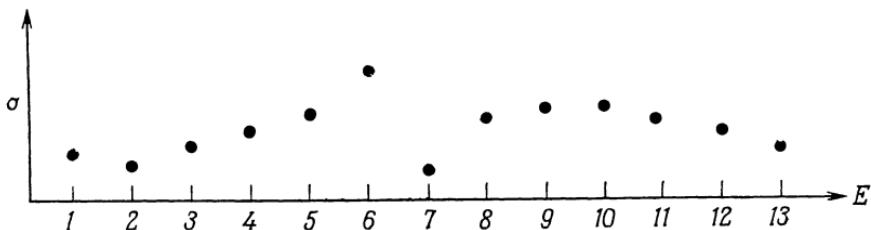
$$p < \sqrt{\hbar \sqrt{2Mk}}?$$

IV. 12.2 (10 баллов). При квантовомеханическом рассмотрении процесса рассеяния используют волновую функцию вида

$$\psi(r) \sim e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r \rightarrow \infty.$$

- а) Воспользуйтесь этой функцией ψ и получите выражения для падающего и рассеянного потоков вероятности.
 б) Найдите соотношение, связывающее $f(\theta)$ и сечение рассеяния $\sigma(\theta)$.

IV. 12.3 (10 баллов).



На рисунке нанесены экспериментальные точки, отражающие, например, зависимость сечения рассеяния атома от энергии бомбардирующих электронов. Они нанесены довольно редко — нужно было получить самое общее представление о характере процесса. Предположим, что вам предоставлена возможность произвести пять дополнительных измерений. Какие значения координаты E вы бы приблизительно выбрали и почему?

IV. 12.4 (5 баллов). Счетчик регистрирует излучение долгоживущего радиоактивного препарата. Среднее показание его равно 10^4 импульсов в секунду. Какова вероятность того, что в течение одной секунды он зарегистрирует менее 9700 импульсов?

IV. 12.5 (5 баллов). Время жизни радиоактивного элемента в среднем составляет $\tau = 10$ дней. Какова вероятность того, что произвольный атом этого элемента распадается в течение пятого дня?

IV. 12.6 (5 баллов). Период полураспада свободного нейтрона ~ 12 мин. Какой энергией (в МэВ) должен обладать нейтрон, чтобы с вероятностью 50% он мог выжить, преодолев расстояние в 10 световых лет от звезды до Земли?

IV. 12.7 (3 балла). K -мезон распадается на два нейтральных пиона с нулевым спином. Каким спином обладает K -мезон?

IV. 12.8 (3 балла).

- Какому расположению трех положительных зарядов на сфере отвечает состояние с наименьшей энергией?
- В случае четырех зарядов?

IV. 12.9 (3 балла). Оцените высоту кулоновского барьера, преодолеваемого α -частицами у поверхности ядра U^{238} при его распаде.

IV. 12.10 (3 балла). Какой радиус имела бы $1s$ -оболочка воображаемого атома из нейтрона и электрона, связанных между собой силой только гравитационного взаимодействия?

IV. 12.11 (3 балла). Как зависит радиус K -оболочки атома от его атомного номера Z ?

IV. 12.12 (3 балла). Атом водорода находится в возбужденном состоянии, характеризуемом квантовыми числами $n = 3$ и $l = 2$. На какие нижние уровни он может совершить излучательные переходы? (Рассмотрите только электрические дипольные переходы.)

IV. 12.13 (3 балла). Сколько электронов может уместиться на оболочке с главным квантовым числом $n = 5$?

IV. 12.14 (3 балла). Рассмотрим атом из электрона и позитрона, находящийся в состоянии с орбитальным квантовым числом $l = 1$. Определите магнитный момент такого атома.

IV. 12.15 (3 балла). Определите собственные значения следующих четырех операторов, относящихся к спину электрона:

$$s_x, s_y, s_z \text{ и } s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2.$$

IV. 12.16 (3 балла). Представьте себе, что электрон, помещенный в однородное магнитное поле, обладает только одной степенью свободы — спиновой. Напишите выражение для энергии электрона в различных состояниях в зависимости от магнитного поля B и фундаментальных констант e , \hbar , m и c .

IV. 12.17 (3 балла). Покоящаяся частица (например, нейтральный пион) массой m распадается на два фотона. Определите импульс p каждого фотона.

IV. 12.18 (3 балла). Фотон выбивает электрон из покоящегося атома водорода. При каком условии пренебрежение связью электрона с ядром и его движением не вызывает грубых ошибок при анализе этого процесса?

IV. 12.19 (3 балла). Атом водорода находится в состоянии, характеризуемом главным квантовым числом $n = 2$. Какому орбитальному квантовому числу ($l = 0$ или $l = 1$) соответствует в полуклассическом представлении орбита с большим эксцентризитетом?

IV. 12.20 (3 балла). Какова (в электрон-вольтах) энергия связи электрона, находящегося в основном состоянии, с ядром однократно ионизованного атома гелия?

IV. 12.21 (3 балла). Назовите два важных механизма, которыми можно объяснить ослабление пучка фотонов с энергией 500 кэВ при его прохождении через вещество.