ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Предметом математического анализа является изучение переменных величин и зависимостей между ними.

Понятия о функции и о пределе переменной величины составляют основу математического анализа.

§ 1. Переменные величины и функции, их обозначение

Интервалом от a до b называется совокупность всех чисел x, удовлетворяющих одному из следующих двойных неравенств:

1) $a \leqslant x \leqslant b$; 2) $a < x < b$; 3) $a \leqslant x < b$; 4) $a < x \leqslant b$.

Закрытый интервал 1 называется отрезком и обозначается $[a, b]$; открытый интервал 2 обозначается (a, b); полуоткрытые интервалы 3 и 4 обозначаются соответственно $[a, b)$ и $(a, b]$.

Переменной называется величина, принимающая различные числовые значения.

Областью изменения переменной называется совокупность всех принимаемых ею числовых значений. Она может состоять из одного или нескольких интервалов и из отдельных точек.

Взаимосвязанное изменение переменных называется функциональной зависимостью.

При изучении функциональной зависимости между двумя переменными полагают, что одна из них является независимой переменной, которой можно придавать произвольные значения из области ее изменения, а другая — зависимой от нее. Независимая переменная называется аргументом, а зависимая — функцией.

Н. И. Лобачевскому принадлежит следующее определение понятия функции: *переменная y называется функцией переменной x, если каждому значению x, из области ее изменения, соответствует определенное значение y.*

Для сокращения записей употребляется символическое обозначение функций: $y = f(x)$, $S = \varphi(t)$, $u = F(v)$,...

Если функция от x обозначена символом $P(x)$, то $P(a)$ обозначает частное значение этой функции при $x = a$.

Так, если $P(x)=x^2+2x-5$, то

$$P(3)=3^2+2\cdot 3-5=10;\ P(0)=-5;\ P(a)=a^2+2a-5.$$

Основными элементарными функциями называются: 1) степенная функция $y=x^n$; 2) показательная функция $y=a^x$, $a>0$; 3) логарифмическая функция $y=\log_a x$, $a>0$; 4) тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec} x$; 5) обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$.

Функции, заданные одной формулой посредством конечного числа арифметических действий и операций, определяемых основными элементарными функциями, называются элементарными. Например:

$$y=5x^3\sin 2x;\quad y=\lg\frac{1+\operatorname{tg}\sqrt{x}}{x-\operatorname{ctg}^2 x}.$$

Все остальные функции называются неэлементарными. Например, неэлементарной является функция, определяемая несколькими различными формулами для различных интервалов изменения аргумента:

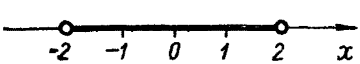
$$y=\begin{cases} x^3 \text{ при } x\leqslant 0 \\ x+2 \text{ при } x>0. \end{cases}$$

Функция $f(x)$, обладающая свойством $f(x)=f(-x)$, называется *четной*, например x^2, $\cos x$, а обладающая свойством $f(x)=-f(-x)$, называется *нечетной*, например x^3, $\sin x$. Многие функции не являются ни четными, ни нечетными, например a^x, $\sqrt{x}$.

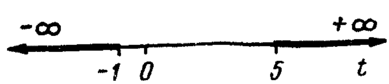
1. Определить и построить на числовой оси области изменения переменных x, t и α, заданные следующими неравенствами:

$$1)\ x^2\leqslant 4;\quad 2)\ |t-2|>3;\quad 3)\ -9\leqslant 1-2\alpha<5.$$

Решение. 1) Извлекая квадратный корень из обеих частей первого неравенства, получим $|x|\leqslant 2$. Отсюда следует, что $-2\leqslant x\leqslant 2$. Эти неравенства и определяют собой область изменения переменной x, т. е. совокупность принимаемых ею числовых значений. Она представляет закрытый интервал или отрезок $[-2;\ 2]$. Построим этот отрезок на числовой оси Ox (черт. 1); он будет симметричен относительно начальной точки $x=0$.



Черт. 1



Черт. 2

2) Избавляясь от знака абсолютной величины в неравенстве, содержащем t, получим два неравенства: $t-2<-3$ и $t-2>3$. Разрешая их относительно t, найдем $t<-1$ и $t>5$. Следовательно, область изменения переменной t (черт. 2) состоит из двух бесконечных открытых интервалов $(-\infty;\ -1)$ и $(5;\ +\infty)$.

3) Решаем неравенства, содержащие α. Вычитая из всех частей неравенств по единице и затем деля их на -2, получим

$$-10 \leqslant -2\alpha < 4, \quad -2 < \alpha \leqslant 5.$$

Следовательно, область изменения переменной α (черт. 3) представляет полуоткрытый интервал $(-2; 5)$.

2. Вычислить частное значение функции:

Черт. 3

1) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$

а) при $x=0$; б) при $x=a+1$;

2) $\varphi(x)=2\arcsin x+\operatorname{arctg} 2x$ при $x=-\frac{1}{2}$;

3) $y=x^2\arccos\frac{x}{2}-3x\operatorname{arcctg} x$ при $x=-1$.

Решение. 1а) Подставляя значение $x=0$, получим соответствующее частное значение функции $f(x)$:

$$f(0)=\sqrt{0^2-5\cdot 0+4}=\sqrt{4}=2.$$

Здесь взято арифметическое значение корня, а не ± 2. Вообще *в математическом анализе рассматриваются только однозначные функции, которые могут иметь только одно значение при каждом значении аргумента.*

1б) При $x=a+1$ частное значение функции $f(x)$ будет

$$f(a+1)=\sqrt{(a+1)^2-5(a+1)+4}=\sqrt{a^2-3a.}$$

2) Частное значение функции $\varphi(x)$ при $x=-\frac{1}{2}$:

$$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)=2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}(-1)=2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+$$
$$+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{7}{12}\pi.$$

Здесь учтено, что $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ — однозначные функции, изменяющиеся между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$*. При $x>0$ их значения берутся в первой четверти, а при $x<0$ — в четвертой.

* $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}$.

3) При $x = -1$ частное значение функции y будет

$$y(-1) = (-1)^2 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - 3(-1) \operatorname{arcctg}(-1) =$$
$$= \frac{2}{3}\pi + \frac{9}{4}\pi = \frac{35}{12}\pi,$$

так как $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ — однозначные функции, изменяющиеся от 0 до π*. При $x > 0$ их значения берутся в первой четверти, а при $x < 0$ — во второй.

3. Найти корни x_1 и x_2 функции $F(x) = x^2 + 10x + 9$ и вычислить ее частные значения при x, равном среднему арифметическому и среднему геометрическому этих корней.

Решение. *Корнями функции называются значения аргумента, которые обращают ее в нуль.*

Определим корни функции $F(x)$, приравняв ее нулю:

$$x^2 + 10x + 9 = 0, \text{ откуда } x_1 = -9,\ x_2 = -1.$$

Среднее арифметическое корней x_1 и x_2 равно их полусумме $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-9-1}{2} = -5$, а среднее геометрическое — квадратному корню из их произведения $\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{9} = 3$. Искомые частные значения функции $F(x)$ будут:

$$F(-5) = (-5)^2 + 10(-5) + 9 = -16;$$
$$F(3) = 3^2 + 10 \cdot 3 + 9 = 48.$$

4. Дана функция $P(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$. Показать, что $P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x)$.

Решение. Найдем $P\left(\frac{1}{x}\right)$, подставляя $\frac{1}{x}$ вместо x в данное аналитическое выражение функции $P(x)$,

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{2}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + x^2 - 2x.$$

Следовательно, $P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x)$ при любом значении x. Например,

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = P(2) = -\frac{3}{4};\ P(-10) = P(-0,1) = 120,21.$$

---

* $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$; $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$.

5. Определить, какая из данных функций является четной, нечетной или не четной и не нечетной:

$$1)\ f(x)=\frac{x^2}{\sin 2x};\quad 2)\ \varphi(x)=4-2x^4+\sin^2 x;$$

$$3)\ u(x)=x^3+2x-1;\quad 4)\ y(x)=\frac{1+a^{kx}}{1-a^{kx}}.$$

Решение. *Чтобы определить, будет ли некоторая функция $Q(x)$ четной или нечетной, необходимо найти $Q(-x)$.*

Заменяя x через $-x$, получим:

$$1)\ f(-x)=\frac{(-x)^2}{\sin 2(-x)}=\frac{x^2}{-\sin 2x}=-\frac{x^2}{\sin 2x},$$

т. е. $f(-x)=-f(x)$, значит, функция $f(x)$ нечетная;

$$2)\ \varphi(-x)=4-2(-x)^4+\sin^2(-x)=4-2x^4+\sin^2 x,$$

т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, следовательно, функция $\varphi(x)$ четная;

$$3)\ u(-x)=(-x)^3+2(-x)-1=-x^3-2x-1,$$

здесь $u(-x)\neq u(x)$ и $u(-x)\neq -u(x)$, поэтому функция $u(x)$ не четная и не нечетная;

$$4)\ y(-x)=\frac{1+a^{-kx}}{1-a^{-kx}}=\frac{a^{kx}+1}{a^{kx}-1}$$

(числитель и знаменатель первой дроби умножены на a^{kx}), т. е. $y(-x)=-y(x)$, следовательно, функция $y(x)$ нечетная.

6. Построить на числовой оси области изменения переменных, заданные следующими неравенствами:

1) $|x|<4$; 2) $(y-1)^2\geqslant 9$; 3) $-3<z+1\leqslant 4$; 4) $2|x|+3>5$.

7. $f(x)=x^2+3x-1$; вычислить: $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(a+1)$, $f(a)+1$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$.

8. $F(x)=\frac{3x+4}{x^2+1}$; найти $F(0)$, $F(2)$, $F\left(\frac{a}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{F(x)}$, $F(b)-F(1)+7F(-1)$.

9. $\varphi(t)=t^2$; найти: 1) $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$; 2) $\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a-h)}{2h}$.

10. $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=x^3$; показать, что $f[\varphi(2)]=\varphi[f(2)]$; $\varphi[1+f(1)]=2f[1+\varphi(1)]$.

11. Определить, какая из данных функций четная, нечетная или не четная и не нечетная:

1) $y=3x-2\sqrt[3]{x}$; 2) $z=5x\sin 3x$; 3) $u=|t|-t^3$;

4) $v=|x|\operatorname{ctg}^2 x$; 5) $w=\alpha^2+|\alpha+2|$; 6) $x=\frac{a^{2\varphi}-1}{a^{\varphi}}$.