§ 2. Область определения (существования) функции

Областью определения функции называется совокупность всех точек числовой оси, в которых она имеет определенные действительные значения.

Очевидно, для многих функций областью определения будет не вся числовая ось, а только некоторая ее часть. Так, для функции $y=\sqrt{x}$ областью определения является полуоткрытый интервал $0 \leqslant x < +\infty$; для функции $z=\frac{1}{x-1}$ область определения состоит из двух интервалов: $-\infty < x < 1$ и $1 < x < +\infty$.

Основные элементарные функции имеют следующие области определения:

степенная функция $y=x^n$ с рациональным положительным показателем $n=\frac{\alpha}{\beta}$ при нечетном β определена на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$, а при четном β определена в интервале $0 \leqslant x < +\infty$ *;

показательная функция $y=a^x$, $a>0$ определена на всей числовой оси;

логарифмическая функция $y=\log_a x$, $a>0$ определена в интервале $0 < x < +\infty$;

тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ определены на всей числовой оси; $y=\operatorname{tg} x$, $y=\sec x$ определены на всей числовой оси, исключая точки $x_k=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\operatorname{cosec} x$ определены на всей числовой оси, исключая точки $x_k=k\pi$;

обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$ определены на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$ определены на всей числовой оси.

При нахождении области определения элементарной функции, заданной формулой $y=f(x)$, нужно обращать внимание на следующие элементы формулы:

1) на радикалы четной степени — функция будет определена только для тех значений x, при которых их подкоренные выражения будут неотрицательны;

2) на знаменатели дробных выражений — функция будет определена только для тех значений x, при которых знаменатели отличны от нуля;

3) на трансцендентные функции $\log v$, $\operatorname{tg} v$, $\operatorname{ctg} v$, $\sec v$, $\operatorname{cosec} v$, $\arcsin v$, $\arccos v$, которые определены не всюду, а только при указанных выше значениях своего аргумента v.

Если эти перечисленные элементы отсутствуют в формуле $y=f(x)$, то областью определения функции y будет вся число-

---

* При $\beta=1$ показатель n будет целым числом.

вая ось (исключая те случаи, когда область определения функции ограничивается специальными условиями задачи).

12. Найти область определения каждой из следующих функций:

1) $y=\sqrt{1-x^2}$; 2) $u=\frac{x-1}{x^2-5x+6}+\sqrt[3]{2x+1}$;

3) $v=\arccos\frac{1-2x}{3}$; 4) $p=\frac{x}{\sin x}$; 5) $q=\log_2(x^2-9)$.

Решение. 1) Поскольку аргумент x содержится под радикалом четной степени, то функция y будет иметь вещественные значения только при тех значениях x, при которых подкоренное выражение будет неотрицательно, т. е. $1-x^2\geqslant 0$. Решая это неравенство, получим

$$x^2\leqslant 1;\quad |x|\leqslant 1;\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Следовательно, область определения функции y есть отрезок $[-1;\ 1]$.

2) Здесь аргумент x содержится в знаменателе дроби. Поэтому x не может иметь тех значений, которые обращают знаменатель в нуль, так как деление на нуль не имеет смысла. Приравняв знаменатель нулю, найдем эти значения x:

$$x^2-5x+6=0;\qquad x_1=2;\qquad x_2=3.$$

Второе слагаемое в выражении функции u не накладывает никаких ограничений на значения x, поскольку показатель радикала нечетный. Следовательно, областью определения функции u является вся числовая ось, кроме точек $x=2$ и $x=3$.

3) Функция v будет определена только для тех значений x, для которых $-1\leqslant\frac{1-2x}{3}\leqslant 1$. Решив эти неравенства, получим

$$-\frac{4}{3}\leqslant-\frac{2}{3}x\leqslant\frac{2}{3};\quad -1\leqslant x\leqslant 2.$$

Отрезок $[-1; 2]$ и является областью определения функции v.

4) Найдем значения x, которые обращают знаменатель функции p в нуль: $\sin x=0$; $x_k=k\pi$; $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

При этих значениях x функция p не имеет никаких значений.

Областью определения функции p является вся числовая ось, кроме точек x_k.

5) Логарифмическая функция q определена только для положительных значений своего аргумента (логарифмируемого выражения), поэтому $x^2-9>0$.

Решая это неравенство, получим $|x|>3$, откуда следует, что $-\infty<x<-3$ и $3<x<+\infty$, т. е. область определения функции q состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty;\ -3)$ и $(3;\ +\infty)$.

13. Найти области определения функций и построить их на числовой оси:

1) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$;   2) $z=\sqrt{1+t}-2\sqrt[4]{5-t}$;

3) $u=\frac{\alpha^2+1}{1+\sqrt{\alpha^2-9}}$;   4) $r=\sqrt{\sin\varphi}$;

5) $v=\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3\cos 2x}}$;   6) $v=\lg(x-1)+\arcsin\frac{x}{2}$.

§ 3. Построение графика функции по точкам

Наглядное графическое изображение функциональной зависимости между двумя переменными x и y можно получить, рассматривая значения этих переменных как координаты точек на плоскости.

Графиком функции, заданной уравнением $y=f(x)$, называется совокупность всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Обычно график функции представляет некоторую плоскую линию.

Построение графика аналитически заданной функции по точкам выполняется в следующем порядке:

1) по данному аналитическому выражению функции составляется таблица соответствующих друг другу значений переменных;

2) выбирается система координат с подходящими единицами масштаба для каждой переменной.

Обычно применяется прямоугольная система координат и одна общая единица масштаба для обеих координатных осей;

3) строятся точки, координатами которых являются соответствующие друг другу значения аргумента и функции, содержащиеся в таблице;

4) полученные точки соединяются плавной линией.

Построенный этим способом график функции будет тем точнее, чем больше значений переменных содержится в таблице, чем больше точек будет нанесено на координатную плоскость.

Построение графика функции упрощается, если она является четной, нечетной или периодической. *График четной функции симметричен относительно оси Oy; график нечетной функции симметричен относительно начала координат; график периодической функции получается путем повторения части ее графика, соответствующей одному периоду.*

14. Построить графики функций:

1) $y=x^2-2x-1$ на отрезке $[-2;\ 4]$;

2) $y=-\frac{4x}{x^2+1}$ на отрезке $[-5;\ 5]$;

3) $y=7x^2-100\sqrt{1+x^2}$ на отрезке $|x|\leqslant 7$;