13. Найти области определения функций и построить их на числовой оси:

1) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$; 2) $z=\sqrt{1+t}-2\sqrt[4]{5-t}$;

3) $u=\frac{\alpha^2+1}{1+\sqrt{\alpha^2-9}}$; 4) $r=\sqrt{\sin\varphi}$;

5) $v=\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3\cos 2x}}$; 6) $v=\lg(x-1)+\arcsin\frac{x}{2}$.

§ 3. Построение графика функции по точкам

Наглядное графическое изображение функциональной зависимости между двумя переменными x и y можно получить, рассматривая значения этих переменных как координаты точек на плоскости.

Графиком функции, заданной уравнением $y=f(x)$, называется совокупность всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Обычно график функции представляет некоторую плоскую линию.

Построение графика аналитически заданной функции по точкам выполняется в следующем порядке:

1) по данному аналитическому выражению функции составляется таблица соответствующих друг другу значений переменных;

2) выбирается система координат с подходящими единицами масштаба для каждой переменной.

Обычно применяется прямоугольная система координат и одна общая единица масштаба для обеих координатных осей;

3) строятся точки, координатами которых являются соответствующие друг другу значения аргумента и функции, содержащиеся в таблице;

4) полученные точки соединяются плавной линией.

Построенный этим способом график функции будет тем точнее, чем больше значений переменных содержится в таблице, чем больше точек будет нанесено на координатную плоскость.

Построение графика функции упрощается, если она является четной, нечетной или периодической. *График четной функции симметричен относительно оси Oy; график нечетной функции симметричен относительно начала координат; график периодической функции получается путем повторения части ее графика, соответствующей одному периоду.*

14. Построить графики функций:

1) $y=x^2-2x-1$ на отрезке $[-2;\ 4]$;

2) $y=-\frac{4x}{x^2+1}$ на отрезке $[-5;\ 5]$;

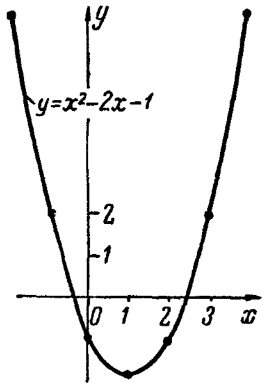
3) $y=7x^2-100\sqrt{1+x^2}$ на отрезке $|x|\leqslant 7$;

4) $y = x^2 - 4|x-1| + 1$ на отрезке $[-6;\ 5]$;

5) $y = \frac{16}{x^2} - 1$ между точками пересечения с осью Ox.

Решение. 1) В условии задачи указано, что независимой переменной x можно придавать только значения, заключенные на отрезке $[-2;\ 4]$. Учитывая это, составим следующую таблицу, беря для простоты только целые значения x и вычисляя из данного уравнения соответствующие значения y:

x	y
-2	7
-1	2
0	-1
1	-2
2	-1
3	2
4	7



Черт. 4

Введем прямоугольную систему координат, как показано на черт. 4, с одинаковыми единицами масштаба, которые указаны числовыми пометками на координатных осях.

Построим точки, откладывая содержащиеся в таблице значения аргумента x по оси абсцисс, а значения функции y по оси ординат. Соединим полученные точки плавной кривой, которая и будет графиком данной функции. Эта кривая называется параболой.

Вообще *графиком всякой квадратной функции* $y = ax^2 + bx + c$ *является парабола, ось симметрии которой параллельна оси* Oy.

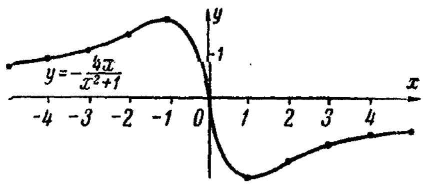
2) Функция $y = -\frac{4x}{x^2+1}$ — нечетная, так как для нее $y(-x) = -y(x)$. Для значений аргумента, отличающихся только по знаку, значения нечетной функции будут также отличаться только по знаку. Поэтому при составлении таблицы здесь достаточно вычислить из данного уравнения значения функции только для положительных значений аргумента. Значения функции для отрицательных значений аргумента получим путем простой перемены знаков.

Выберем систему координат с одинаковыми масштабами на координатных осях (черт. 5).

Построим точки для каждой пары числовых значений x и y, которые содержатся в строках таблицы. Соединяя эти точки плавной кривой, получим график, симметричный относительно начала координат.

x	y
0	0
± 1	∓ 2
± 2	$\mp \frac{8}{5}$
± 3	$\mp \frac{6}{5}$
± 4	$\mp \frac{16}{17}$
± 5	$\mp \frac{10}{3}$

3) Функция $y=7x^2-100\sqrt{1+x^2}$ является четной, так как при перемене знака у любого значения аргумента значение этой функции не изменяется, $y(-x)=y(x)$. Поэтому здесь при составлении таблицы достаточно вычислить значения функции только для положительных значений аргумента; значения функции

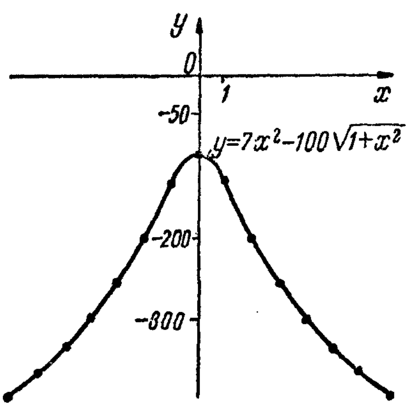


Черт. 5

для отрицательных значений аргумента будут те же.

Составив таблицу, замечаем, что значения аргумента есть числа 1-го порядка, тогда как значения функции — числа 3-го порядка. Поэтому для построения соответствующих точек берем р а з н ы е м а с ш т а-

x	y
0	-100
± 1	$7-100\sqrt{2}\approx-134$
± 2	$28-100\sqrt{5}\approx-195$
± 3	$63-100\sqrt{10}\approx-253$
± 4	$112-100\sqrt{17}\approx-300$
± 5	$175-100\sqrt{26}\approx-335$
± 6	$252-100\sqrt{37}\approx-356$
± 7	$343-100\sqrt{50}\approx-364$



Черт. 6

бы абсцисс и ординат; они показаны числовыми пометками на координатных осях* (черт. 6).

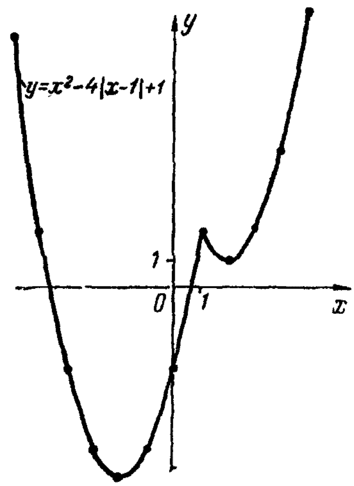
График данной четной функции симметричен относительно оси ординат.

4) Составим таблицу значений функции $y=x^2-4|x-1|+1$ для значений аргумента x, заключенных на отрезке $[-6; 5]$.

x	y
—6	9
—5	2
—4	—3
—3	—6
—2	7
—1	—6
0	—3
1	2
2	1
3	2
4	5
5	10

Затем строим точки и, соединяя их сплошной линией, получим искомый график (черт. 7).

Данная функция не является четной или нечетной. Поэтому ее график не симметричен ни относительно оси Oy, ни относительно начала координат.



Черт. 7

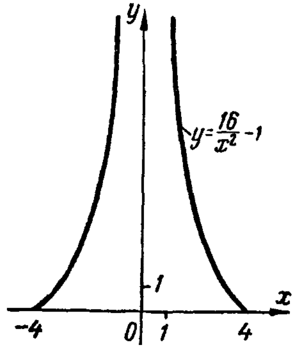
5) Абсциссы точек пересечения графика данной функции с осью Ox найдем из данного уравнения, зная, что в этих точках ордината $y=0$. При $y=0$, $16-x^2=0$, откуда $x=\pm 4$. Далее составляем таблицу значений данной четной функции на отрезке $[-4; 4]$ и строим ее график (черт. 8).

Когда x приближается к нулю слева или справа, значения функции и ординаты ее графика неограниченно возрастают. При $x=0$ функция не имеет никакого числового значения, ее график состоит из двух отдельных бесконечных ветвей.

* Порядком числа $|N|\geqslant 1$ называется число его цифр до запятой, а порядком числа $|N|<1$ называется число нулей после запятой до первой значащей цифры, взятое со знаком минус.

15. Построить на одном чертеже графики функций $y_1 = 1 + \frac{1}{2}x$ и $y_2 = \sin x$. Путем сложения ординат полученных линий построить график функции $y = 1 + \frac{1}{2}x + \sin x$.

x	y
$\pm 0,5$	63
± 1	15
± 2	3
± 4	0



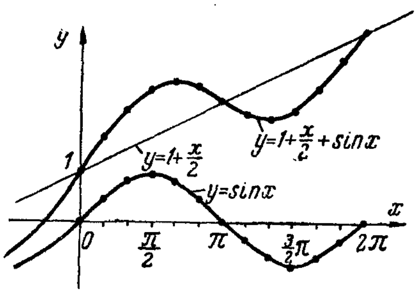
Черт. 8

Решение. *График всякой линейной функции есть прямая линия.* Поэтому для построения графика первой данной функции, которая является линейной, достаточно иметь две пары соответствующих друг другу значений переменных, т. е. две точки.

Для построения графика второй данной функции берем значения x в радианах, а значения y_2 из тригонометрических таб-

x	0	2
y_1	1	2

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y_2	0	0,5	0,9	1	0,9	0,5	0	—0,5	—0,9	—1	—0,9	—0,5	0



Черт. 9

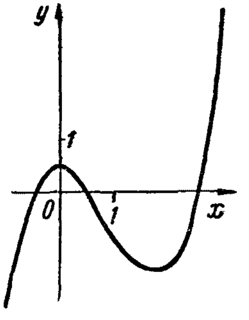
x	y
—1	—2,1
0	0,5
1	—0,9
2	—1,5
3	3,5

лиц. Учитываем также периодичность этой функции: построив ее график на протяжении одного периода $[0;\ 2\pi]$, затем повторяем его. Алгебраически складывая ординаты точек линий y_1 и y_2, имеющих одинаковые абсциссы x, получим искомый график функции $y=y_1+y_2$ (черт. 9).

16. Найти приближенные значения корней функции $y=0{,}8x^3-2x^2-0{,}2x+0{,}5$, построив ее график на отрезке $[-1;\ 3]$.

Решение. Корни функции, т. е. значения аргумента, обращающие ее в нуль, можно найти как абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс, так как в этих точках $y=0$.

Составив таблицу числовых значений переменных x и y, построим график данной функции (черт. 10). Из чертежа находим искомые приближенные значения корней функции: $x_1\approx-0{,}4$; $x_2\approx0{,}5$; $x_3\approx2{,}6$.



Черт. 10

17. Построить по точкам на отрезке $[-3;\ 3]$ графики следующих функций:

1) $y=\frac{x^3-12x}{3}$; 2) $y=1-2^x$; 3) $y=1-|x^2-1|$;

4) $y=\begin{cases}1-x & \text{при } x\leqslant 0\\ 1+\sqrt{3x} & \text{при } x>0.\end{cases}$

18. Найти области определения функций и построить их графики:

1) $y=2\sqrt{x}+\sqrt{6-x}$; 2) $y=x\sqrt{8-x^2}$;

3)* $y=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{16-x^2}$; 4)* $y=4\sqrt{|x|}-\sqrt{x^3}$.

19. Построить графики функций между точками пересечения с осью Ox:

1) $y=6x-x^2$; 2) $y=\frac{1}{4}(x^3-12x^2+36x)$;

3) $y=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$; 4)* $y=|x-2|-3$.

20. Построить графики функций между точками пересечения с осями Oy и Ox:

1) $y=2-\sqrt[3]{2x-8}$; 2) $y=\frac{x-8}{x-4}$; 3)* $y=|x^2-6x|$;

4)* $y=\begin{cases}10-x & \text{при } x<5\\ 14x-x^2-40 & \text{при } x\geqslant 5.\end{cases}$