§ 4. Построение графика функции путем сдвига и деформации известного графика другой функции

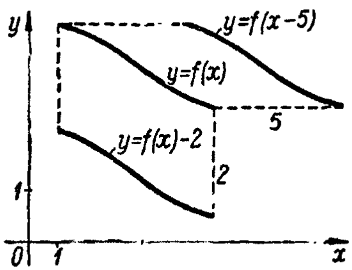
Зная график какой-либо функции, можно построить графики многих других более сложных функций чисто геометрическим путем, без составления таблицы числовых значений переменных.

Так, *исходя из графика функции* $y=f(x)$, *можно посредством его сдвига или деформации построить графики для функций вида*

$$y=f(x-a),\quad y=f(x)+b,\quad y=Af(x),$$
$$y=f(kx),\quad y=Af[k(x-a)]+b.$$

График функции $y=f(x-a)$ получается из исходного графика путем сдвига его вдоль оси абсцисс на a масштабных единиц этой оси, вправо при $a>0$ и влево при $a<0$ (черт. 11).

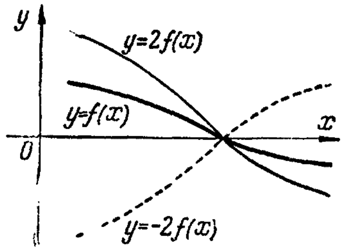
График функции $y=f(x)+b$ получается из исходного графика путем сдвига его вдоль оси ординат на b масштабных единиц этой оси, вверх при $b>0$ и вниз при $b<0$ (черт. 11).



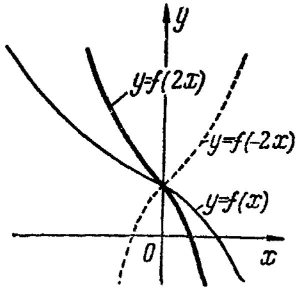
Черт. 11

График функции $y=Af(x)$ получается из исходного путем умножения ординат его точек на коэффициент A. При этом, если $|A|>1$, то ординаты всех точек исходного графика увеличиваются по абсолютной величине в $|A|$ раз, если $|A|<1$, то они уменьшаются по абсолютной величине в $\frac{1}{|A|}$ раз, если $A<0$, то изменяются еще и их знаки. График функции $y=Af(x)$ при $A<0$ будет симметричен графику функции $y=|A|f(x)$ относительно оси абсцисс (черт. 12).

График функции $y=f(kx)$ получается из исходного графика путем деления абсцисс его точек на коэффициент k. При этом, если $|k|>1$, то абсциссы всех точек исходного графика уменьшаются по абсолютной величине в $|k|$ раз; если $|k|<1$, то они



Черт. 12



Черт. 13

увеличиваются по абсолютной величине в $\frac{1}{|k|}$ раз; если $k<0$, то изменяются еще и их знаки. График функции $y=f(kx)$, при $k<0$, симметричен графику функции $y=f(|k|x)$ относительно оси ординат (черт. 13).

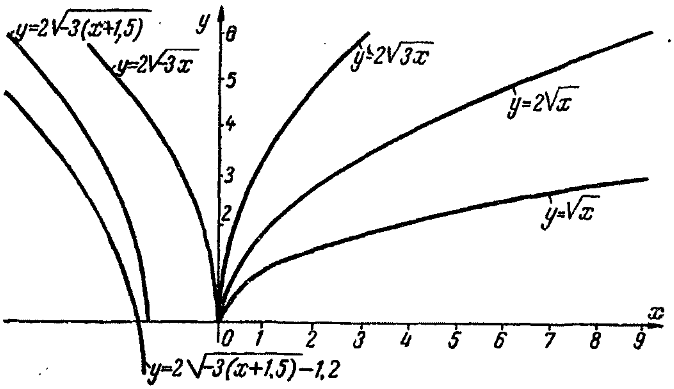
Выполняя указанные сдвиги и деформации графика функции $y=f(x)$ в последовательном порядке, одно вслед за другим, можно строить графики и для функций более сложного вида:

$$y=Af[k(x-a)]+b. \tag{1}$$

21. Построить по точкам график функции $y=\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 9]$ и затем, исходя из этого графика, путем последовательных деформаций его и сдвигов, построить график функции $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}-1,2$.

Решение. Составим таблицу соответственных значений переменных x и y для функции $y=\sqrt{x}$ и построим ее график (черт. 14).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0



Черт. 14

Обозначим функцию $\sqrt{u}$ символом $f(u)$. Тогда данная функция преобразуется к виду

$$y=2f[-3(x+1,5)]-1,2.$$

Сопоставляя ее с выражением (1), находим следующие значения параметров: $A=2$; $k=-3$; $a=-1,5$; $b=-1,2$.

Далее, согласно общим указаниям, строим искомый график следующим путем:

увеличивая в 2 раза ординаты точек графика функции $y=\sqrt{x}$ и сохраняя неизменными их абсциссы, строим график функции $y=2\sqrt{x}$;

уменьшая в 3 раза абсциссы точек графика функции $y=2\sqrt{x}$ и сохраняя неизменными их ординаты, строим график функции $y=2\sqrt{3x}$;

меняя знаки у абсцисс точек графика функции $y=2\sqrt{3x}$ и сохраняя неизменными их ординаты, строим график функции $y=2\sqrt{-3x}$ (графики функций $y=2\sqrt{3x}$ и $y=2\sqrt{-3x}$ симметричны относительно оси ординат);

перенося точки графика функции $y=2\sqrt{-3x}$ в направлении оси абсцисс на 1,5 единицы масштаба этой оси влево, строим график функции $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}$; перенося точки графика функции $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}$ в направлении оси ординат на 1,2 единицы масштаба этой оси вниз, строим искомый график функции $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}-1,2$.

22. Исходя из графика функции $y=\sin x$, путем его деформаций и сдвигов построить график функции $y=-3\sin(2x+8)$.

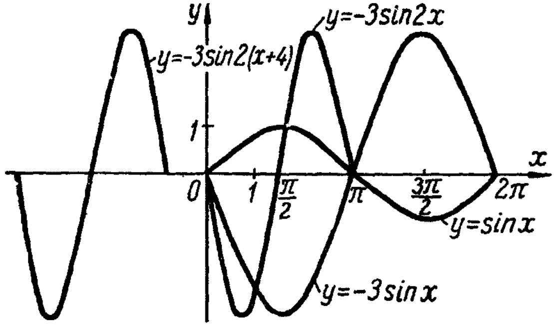
Решение. Заменяя в выражении (1) символ произвольной функции f символом тригонометрической функции sin, получим

$$y=A\sin k(x-a)+b. \tag{2}$$

Преобразуем данную функцию:

$$y=-3\sin(2x+8)=-3\sin 2(x+4)$$

и, сопоставляя ее с выражением (2), определим следующие значения параметров: $A=-3$; $k=2$; $a=-4$; $b=0$.



Черт. 15

Построение искомого графика выполняем, руководствуясь общими указаниями:

увеличивая в 3 раза ординаты точек графика функции $y=\sin x$ по абсолютной величине, меняя их знаки и сохраняя неизменными абсциссы, строим график функции $y=-3\sin x$ (черт. 15);

уменьшая в 2 раза абсциссы точек графика функции $y = -3\sin x$ и сохраняя неизменными их ординаты, строим график функции $y = -3\sin 2x$;

перенося точки графика функции $y = -3\sin 2x$ в направлении оси абсцисс на 4 единицы масштаба этой оси влево, строим искомый график функции $y = -3\sin 2(x+4)$.

Пользуясь периодичностью данной функции, полученный график можно продолжить в обе стороны.

23. Построить по точкам на отрезке $[-4; 4]$ график функции $y = x^2$ и затем путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

1) $y = 2x^2 - 5$; 2) $y = 3 - \frac{x^2}{2}$; 3) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$.

24. Исходя из графика функции $y = \sqrt{x}$ (черт. 14), путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

1) $y = 1 + \sqrt{2x}$; 2) $y = 3\sqrt{-2x} - 2$;

3) $y = 2 - 3\sqrt{x+5}$; 4)* $y = \frac{1}{2}\sqrt{2x-6} - 5$.

25. Зная график функции $y = \sin x$ (черт. 9), путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

1) $y = 2\sin(x+1)$; 2) $y = 1 + 3\sin 2x$;

3) $y = -2\sin 3(x-1)$; 4)* $y = 2 - \sin\frac{4-x}{2}$.

26. Зная график функции $y = \cos x$ *, путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики функций:

1) $y = 1 - \frac{1}{2}\cos x$; 2) $y = 2{,}3 + 4\cos(1{,}4 - x)$;

3) $y = -4\cos(2x+3)$; 4)* $y = 4{,}2 - 3\cos\frac{2{,}7-x}{3}$.

§ 5. Переменная как упорядоченное числовое множество. Предел переменной. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел функции

Переменная величина определяется не только множеством тех числовых значений, которые она принимает, но и тем порядком, в котором они следуют друг за другом. Поэтому *в математическом анализе переменная рассматривается как множество чисел, расположенных в известной последовательности, т. е. как упорядоченное числовое множество.*

* Его можно взять из учебника.