уменьшая в 2 раза абсциссы точек графика функции $y = -3\sin x$ и сохраняя неизменными их ординаты, строим график функции $y=-3\sin 2x$;

перенося точки графика функции $y=-3\sin 2x$ в направлении оси абсцисс на 4 единицы масштаба этой оси влево, строим искомый график функции $y=-3\sin 2(x+4)$.

Пользуясь периодичностью данной функции, полученный график можно продолжить в обе стороны.

23. Построить по точкам на отрезке $[-4; 4]$ график функции $y=x^2$ и затем путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

1) $y=2x^2-5$; 2) $y=3-\frac{x^2}{2}$; 3) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$.

24. Исходя из графика функции $y=\sqrt{x}$ (черт. 14), путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

1) $y=1+\sqrt{2x}$; 2) $y=3\sqrt{-2x}-2$;

3) $y=2-3\sqrt{x+5}$; 4)* $y=\frac{1}{2}\sqrt{2x-6}-5$.

25. Зная график функции $y=\sin x$ (черт. 9), путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики следующих функций:

1) $y=2\sin(x+1)$; 2) $y=1+3\sin 2x$;

3) $y=-2\sin 3(x-1)$; 4)* $y=2-\sin\frac{4-x}{2}$.

26. Зная график функции $y=\cos x$*, путем его деформаций и сдвигов построить (на отдельных чертежах) графики функций:

1) $y=1-\frac{1}{2}\cos x$; 2) $y=2{,}3+4\cos(1{,}4-x)$;

3) $y=-4\cos(2x+3)$; 4)* $y=4{,}2-3\cos\frac{2{,}7-x}{3}$.

§ 5. Переменная как упорядоченное числовое множество. Предел переменной. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел функции

Переменная величина определяется не только множеством тех числовых значений, которые она принимает, но и тем порядком, в котором они следуют друг за другом. Поэтому *в математическом анализе переменная рассматривается как множество чисел, расположенных в известной последовательности, т. е. как упорядоченное числовое множество.*

* Его можно взять из учебника.

Простейшим частным случаем переменной является такая величина v, последовательные значения которой могут быть перенумерованы: $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$

Такое простейшего вида упорядоченное числовое множество называется *числовой последовательностью.*

I. *Число a называется пределом переменной x, если абсолютное значение их разности $a-x$ для всех значений x, следующих за некоторым значением x_0, будет меньше любого заранее данного положительного числа ε, как бы мало оно ни было.*

II. *Переменная α называется бесконечно малой, если все ее значения, следующие за некоторым значением α_0, по абсолютному значению будут меньше любого заранее данного положительного числа ε, как бы мало оно ни было.*

III. *Переменная z называется бесконечно большой, если все ее значения, следующие за некоторым значением z_0, по абсолютному значению будут больше любого заранее данного положительного числа N, как бы велико оно ни было.*

Если число a есть предел переменной x, то говорят, что x стремится к a и пишут: $\lim x = a$, или $x \to a$.

Бесконечно большая величина z не имеет предела, однако для сокращения речи и записей условно говорят, что z стремится к бесконечности, или предел z равен бесконечности, и пишут $z \to \infty$, или $\lim z = \infty$.

Говорят и пишут также, что $z \to +\infty$, $\lim z = +\infty$, или $z \to -\infty$, $\lim z = -\infty$, если все значения бесконечно большой z, следующие за некоторым значением z_0, сохраняют положительный или отрицательный знак.

Из определений предела переменной, бесконечно малой и бесконечно большой величин следует:

1) *предел бесконечно малой равен нулю* (т. е. если α бесконечно малая, то $\lim \alpha = 0$, или $\alpha \to 0$);

2) *разность между переменной и ее пределом есть величина бесконечно малая* (т. е. если $\lim x = a$, то $x - a = \alpha$);

3) *величина, обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая* $\left(\text{т. е. если } z \to \infty, \text{ то } \frac{1}{z} \to 0\right)$;

4) *величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая* $\left(\text{т. е. если } \alpha \to 0, \text{ то } \frac{1}{\alpha} \to \infty\right)$.

Если $f(x) \to b$, когда $x \to a$ не совпадая с a, то число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a.

Предел функции можно определить иначе, не ссылаясь на определение предела переменной: *Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ (в точке a), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - b|$ будет меньше ε, когда $|x - a|$, при $x \neq a$, меньше δ.*

Если число b есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, то пишут:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, когда x стремится к a произвольным способом;

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$, когда x стремится к a слева, оставаясь меньше a;

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$, когда x стремится к a справа, оставаясь больше a *.

При этом, если существует предел функции, когда $x \to a$ произвольным способом, то существуют и будут с ним одинаковы односторонние пределы функции, когда $x \to a$ только слева или только справа, т. е.

$$\text{если } \lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \text{то } \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b.$$

Если же односторонние пределы различны или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции при $x \to a$ произвольным способом, т. е.

$$\text{если } \lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x), \quad \text{то } \lim_{x \to a} f(x) \text{ не существует.}$$

27. Полагая $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, составить таблицу значений переменных

$$x = 1 + 0{,}1^n; \quad y = -0{,}1^{-n}, \quad z = (-0{,}1)^n, \quad u = (-1)^n + 0{,}1^n$$

и определить характер их изменения при неограниченном увеличении n, т. е. при $n \to +\infty$.

Решение. Вычисляя значения заданных переменных при указанных значениях n, получим следующую таблицу:

n	0;	1;	2;	3;	4;	5;	…; $n \to +\infty$
x	2;	1,1;	1,01;	1,001;	1,0001;	1,00001;	…; $x \to 1+0$
y	−1;	−10;	−100;	−1000;	−10000;	−100000;	…; $y \to -\infty$
z	1;	−0,1;	0,01;	−0,001;	0,0001	−0,00001;	…; $z \to 0$
u	2;	−0,9;	1,01;	−0,999;	0,0001;	−0,99999;	…

Из рассмотрения этой таблицы можно заключить:

1) С увеличением n последовательные значения переменной x приближаются к единице так, что при достаточно большом n

* Если $a = 0$, то вместо $0+0$ $(0-0)$ пишут просто $+0$ (-0).

абсолютное значение их разности $|x-1|$ будет меньше любого заранее данного положительного числа ε, как бы мало оно ни было.

Это же можно и доказать. Пусть задано число $\varepsilon>0$. Полагая $|x-1|=0{,}1^n<\varepsilon$, находим, логарифмируя обе части неравенства, $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $|x-1|$ будет меньше ε, как только n станет больше $\lg\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, согласно определению I переменная x имеет предел, равный единице, $\lim\limits_{n\to+\infty} x=1$, к которому она стремится справа, оставаясь больше его, т. е. монотонно (неизменно) убывая.

2) Последовательные значения переменной y с увеличением n неограниченно убывают так, что при достаточно большом n они по абсолютному значению будут больше любого заданного положительного числа N, как бы велико оно ни было. Докажем это.

Пусть задано число $N>0$. Полагая $|y|=0{,}1^{-n}>N$, находим, логарифмируя обе части неравенства, $n>\lg N$, т. е. $|y|$ будет больше N, как только n станет больше $\lg N$. Следовательно, согласно определению III, переменная y есть бесконечно большая величина: $\lim\limits_{n\to+\infty} y=-\infty$.

3) С увеличением n последовательные значения переменной z приближаются к нулю так, что при достаточно большом n они по абсолютному значению будут меньше любого заданного положительного числа ε, как бы мало оно ни было. Докажем это.

Пусть задано число $\varepsilon>0$. Полагая $|z|=0{,}1^n<\varepsilon$, находим, логарифмируя обе части неравенства, $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $|z|$ будет меньше ε, как только n станет больше $\lg\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, согласно определению II переменная z есть бесконечно малая величина: $\lim\limits_{n\to+\infty} z=0$. Она стремится к своему пределу — нулю, колеблясь около него, т. е. не монотонно.

4) Последовательные значения переменной u с увеличением n не приближаются ни к какому определенному числу. Поэтому переменная u не имеет предела. Она не является и бесконечно большой, так как ее значения не растут безгранично вместе с n. Переменная u — ограниченная величина.

28. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=\begin{cases}0, & \text{если } 0<a<1\\ +\infty, & \text{если } a>1.\end{cases}$

Решение. 1) Пусть постоянная a есть правильная положительная дробь $0<a<1$. Тогда с увеличением n переменная $f(n)=a^n$ будет монотонно убывать, т. е. каждое следующее ее значение будет меньше предыдущего. Докажем, что, начиная с определенного значения $n=n_0$ и для всех последующих значений $n > n_0$, значения функции a^n будут меньше любого заданного положительного числа ε.

Полагая $a^{n_0} < \varepsilon$, найдем искомое значение n_0. Логарифмируя обе части неравенства, получим $n_0 \lg a < \lg \varepsilon$, откуда найдем $n_0 > \frac{\lg \varepsilon}{\lg a}$ (знак неравенства изменился, так как при $0 < a < 1$ $\lg a < 0$).

Следовательно, значение функции a^n при $n = n_0$ и все последующие ее значения при $n > n_0$ будут меньше ε, как бы мало оно ни было, т. е. доказано, что при $0 < a < 1$ и при $n \to +\infty$ функция a^n является бесконечно малой величиной, т. е. $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$.

2) Пусть $a > 1$. Тогда с увеличением n переменная a^n будет монотонно возрастать. Докажем, что, начиная с определенного значения $n = n_0$ и для всех последующих значений $n > n_0$, значения функции a^n будут больше любого заданного положительного числа N.

Полагая $a^{n_0} > N$, найдем $n_0 > \frac{\lg N}{\lg a}$.

Следовательно, для всех значений $n \geqslant n_0$ значения функции a^n будут больше N, как бы велико оно ни было, т. е. доказано, что при $a > 1$ и при $n \to +\infty$ функция a^n является положительной бесконечно большой величиной, т. е. $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

29. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}$; 2) $\lim\limits_{x \to 3} (2x+1) = 7$.

Решение. 1) Составим разность $\frac{2x+3}{3x} - \frac{2}{3} = \frac{1}{x}$. При $x \to \infty$ эта разность является бесконечно малой, как величина, обратная бесконечно большой. А если переменная $\frac{2x+3}{3x}$ отличается от постоянной $\frac{2}{3}$ на величину бесконечно малую, то постоянная является пределом переменной. Следовательно, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}$.

2) Положим $x = 3 + \alpha$ и составим разность: $(2x+1) - 7 = [2(3+\alpha)+1] - 7 = 2\alpha$. При $x \to 3$ переменная $\alpha \to 0$ и разность между функцией $2x+1$ и числом 7, т. е. 2α, будет бесконечно малой. Из этого следует, что $\lim\limits_{x \to 3} (2x+1) = 7$.

30. Найти пределы функции $y = \frac{5}{2-x}$: 1) при $x \to 2-0$ и 2) при $x \to 2+0$. Пояснить решение таблицами.

Решение. 1) Если x будет стремиться к 2 слева, оставаясь меньше 2, то $2-x$ будет положительная бесконечно малая, а $\frac{5}{2-x}$ будет положительная бесконечно большая, т. е. если $x \to 2-0$, то $(2-x) \to +0$, а $\frac{5}{2-x} \to +\infty$, или $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{5}{2-x} = +\infty$.

Указанное поведение переменных x, $2-x$ и $\frac{5}{2-x}$ поясняется следующей таблицей:

x	1;	1,9;	1,99;	1,999;	1,9999;	1,99999;	1,999999;	...
$2-x$	1;	0,1;	0,01;	0,001;	0,0001;	0,00001;	0,000001;	...
$\frac{5}{2-x}$	5;	50;	500;	5000;	50000;	500000;	5000000;	...

2) Если $x \to 2+0$, то $(2-x) \to -0$, а $\frac{5}{2-x} \to -\infty$, или $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{5}{2-x} = -\infty$.

Таблица соответствующих значений переменных x, $2-x$ и $\frac{5}{2-x}$ наглядно показывает их поведение:

x	3;	2,1;	2,01;	2,001;	2,0001;	2,00001;	2,000001;	...
$2-x$	−1;	−0,1;	−0,01;	−0,001;	−0,0001;	−0,00001;	−0,000001;	...
$\frac{5}{2-x}$	−5;	−50;	−500;	−5000;	−50000;	−500000;	−5000000;	...

График функции $y = \frac{5}{2-x}$ изображен на черт. 16.

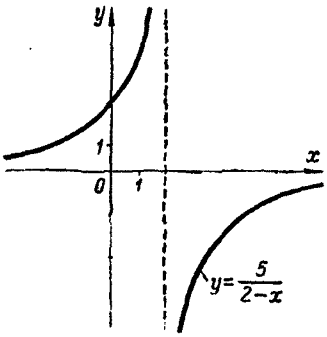
31. Найти пределы функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ при x, стремящемся к нулю: 1) слева, 2) справа и 3) произвольным способом.

Решение. 1) Если переменная x будет стремиться к нулю слева, оставаясь отрицательной, т. е. если x будет отрицательной бесконечно малой, то $\frac{1}{x}$ будет отрицательной бесконечно большой и $\lim\limits_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$, что следует из решения задачи 28 (1).

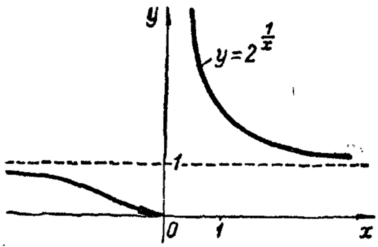
2) Если $x \to +0$, то $\frac{1}{x} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{+\infty} = +\infty$.

3) Если x будет стремиться к нулю произвольным способом, не оставаясь с одной стороны от него (например, как z в задаче 27), то $\frac{1}{x}$ будет стремиться к бесконечности, принимая значения разных знаков. Вследствие этого при $x \to 0$ функция $2^{\frac{1}{x}}$ не имеет предела, не будучи при этом и бесконечно большой величиной $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\infty}$ — не существует.

График функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ показан на черт. 17.



Черт. 16



Черт. 17

32. Найти пределы функции $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$: 1) при $x \to -0$; 2) при $x \to +0$ и 3) при $x \to 0$.

Решение. 1) Если $x \to -0$, то $\frac{1}{x} \to -\infty$, а $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \to -\frac{\pi}{2}$, т. е. $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

2) Если $x \to +0$, то $\frac{1}{x} \to +\infty$, а $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \to \frac{\pi}{2}$, т. е. $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

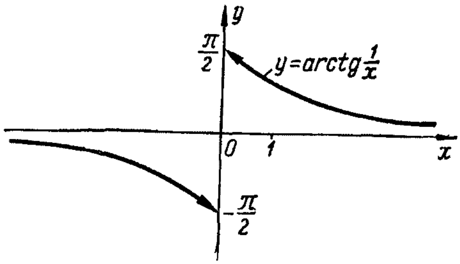
3) Если $x \to 0$, то $\frac{1}{x} \to \infty$, а $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ не стремится ни к какому значению, т. е. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg} \infty$ не существует.

График этой функции показан на черт. 18.

33. Полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, составить таблицу соответствующих значений переменных: $\alpha_1 = 2^n$; $\alpha_2 = -2^n$; $\alpha_3 = (-2)^n$;

$\alpha_4 = 2^{-n}$; $\alpha_5 = -2^{-n}$; $\alpha_6 = (-2)^{-n}$ и определить характер их изменения при $n \to +\infty$.

34. Полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, написать последовательности значений переменных: $x = \frac{n}{n+1}$; $y = (-1)^n \frac{n}{n+1}$; $z = \frac{(-1)^n + 3n}{n+2}$; $u = \frac{3n \cos n\pi}{n+3}$; $v = 2^{-n} \sin \frac{n\pi}{2}$ и определить, у какой из этих переменных существует предел при $n \to +\infty$ и чему он равен.



Черт. 18

35. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2) = 1$;

2) $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 3) = 7$;

3) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x-2}{2x} = \frac{3}{2}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{3-x^2} = -2$.

36. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 3-0} \frac{1}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x \to 3+0} \frac{1}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$;

4) $\lim\limits_{x \to -1-0} 3^{\frac{1}{x+1}}$; 5) $\lim\limits_{x \to -1+0} 3^{\frac{1}{x+1}}$; 6) $\lim\limits_{x \to -1} 3^{\frac{1}{x+1}}$.

Пояснить решение таблицами.

37. Отрезок AB длины l разделен на n равных частей (черт. 19) и на каждой из них, кроме крайних, построены правильные треугольники. Как будет изменяться площадь S_n и периметр P_n полученной зубчатой фигуры, когда $n \to +\infty$?

Черт. 19

§ 6. Теоремы о бесконечно малых и о пределах

I. *Сумма конечного числа бесконечно малых есть также бесконечно малая.*

II. *Произведение бесконечно малой на ограниченную величину есть также бесконечно малая.*

III. *Предел постоянной равен самой постоянной.*

IV. *Предел суммы конечного числа слагаемых равен сумме их пределов:*

$$\lim (u + v - w) = \lim u + \lim v - \lim w.$$