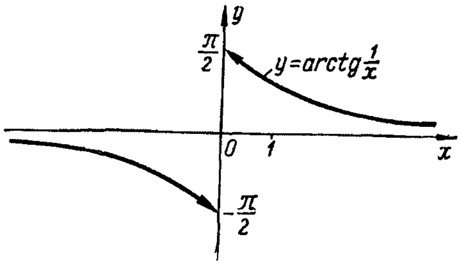
$\alpha_4 = 2^{-n}$; $\alpha_5 = -2^{-n}$; $\alpha_6 = (-2)^{-n}$ и определить характер их изменения при $n \to +\infty$.

34. Полагая $n = 1, 2, 3, \ldots$, написать последовательности значений переменных: $x = \frac{n}{n+1}$; $y = (-1)^n \frac{n}{n+1}$; $z = \frac{(-1)^n + 3n}{n+2}$; $u = \frac{3n \cos n\pi}{n+3}$; $v = 2^{-n} \sin \frac{n\pi}{2}$ и определить, у какой из этих переменных существует предел при $n \to +\infty$ и чему он равен.



Черт. 18

35. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2) = 1$;

2) $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 3) = 7$;

3) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x-2}{2x} = \frac{3}{2}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{3-x^2} = -2$.

36. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 3-0} \frac{1}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x \to 3+0} \frac{1}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$;

4) $\lim\limits_{x \to -1-0} 3^{\frac{1}{x+1}}$; 5) $\lim\limits_{x \to -1+0} 3^{\frac{1}{x+1}}$; 6) $\lim\limits_{x \to -1} 3^{\frac{1}{x+1}}$.

Пояснить решение таблицами.

37. Отрезок AB длины l разделен на n равных частей (черт. 19) и на каждой из них, кроме крайних, построены правильные треугольники. Как будет изменяться площадь S_n и периметр P_n полученной зубчатой фигуры, когда $n \to +\infty$?

Черт. 19

§ 6. Теоремы о бесконечно малых и о пределах

I. *Сумма конечного числа бесконечно малых есть также бесконечно малая.*

II. *Произведение бесконечно малой на ограниченную величину есть также бесконечно малая.*

III. *Предел постоянной равен самой постоянной.*

IV. *Предел суммы конечного числа слагаемых равен сумме их пределов:*

$$\lim (u + v - w) = \lim u + \lim v - \lim w.$$

V. *Предел произведения конечного числа множителей равен произведению их пределов:*

$$\lim (u\, v\, w) = \lim u \cdot \lim v \cdot \lim w.$$

VI. *Предел частного равен частному пределов делимого и делителя, если предел делителя отличен от нуля:*

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \qquad \lim v \neq 0.$$

38. Найти пределы следующих функций:

1) $f(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x}$ при $x \to 1$;

2) $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2}$ при $x \to -1$;

3) $y = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Решение. Пользуясь указанными теоремами, последовательно находим:

$$1) \lim_{x \to 1} \left(2x - 3 - \frac{1}{x}\right) = \lim 2 \cdot \lim x - \lim 3 - \frac{\lim 1}{\lim x} =$$
$$= 2 \cdot 1 - 3 - \frac{1}{1} = -2;$$

$$2) \lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2} = \frac{(\lim x)^3 - 3(\lim x)^2 + 2\lim x - 5}{(\lim x)^2 + 2} =$$
$$= \frac{(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 5}{(-1)^2 + 2} = \frac{-1 - 3 - 2 - 5}{3} = -\frac{11}{3};$$

3) при $x \to 0$ аргумент $\frac{1}{x} \to \infty$, а множитель $\sin \frac{1}{x}$ будет при этом колебаться между -1 и $+1$, не стремясь ни к какому определенному числу, т. е. этот множитель не имеет предела, но является величиной ограниченной, $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1$. Поэтому согласно теореме II данная функция, представляющая произведение бесконечно малой x на величину, ограниченную $\sin \frac{1}{x}$, есть бесконечно малая величина, а ее предел равен нулю: $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

39. При $n \to +\infty$ найти пределы следующих функций:

1) $S_1(n) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}$;

2) $S_2(n) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$;

3) $S_3(n) = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \ldots + \frac{n-1}{n^3}$.

Решение. Каждая из данных функций представляет сумму $n-1$ членов арифметической прогрессии. Разность первой прогрессии $\frac{1}{n}$, второй $\frac{1}{n^2}$ и третьей $\frac{1}{n^3}$.

Выполняя сложение и переходя к пределу, найдем:

1) $S_1=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}(n-1);$

$$\lim_{n\to+\infty} S_1=\frac{1}{2}(\lim n-1)=+\infty.$$

2) $S_2=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right);$

$$\lim_{n\to+\infty} S_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lim n}\right)=\frac{1}{2}.$$

3) $S_3=\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{n-1}{n^3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right);$

$$\lim_{n\to+\infty} S_3=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lim n}-\frac{1}{(\lim n)^2}\right]=0.$$

В этой задаче, при $n\to+\infty$ функции S_1, S_2 и S_3 являются суммами бесконечно малых величин, число которых неограниченно возрастает вместе с n. Полученные результаты показывают, что S_1 есть величина бесконечно большая, S_2 — величина, стремящаяся к $\frac{1}{2}$, S_3 — величина бесконечно малая.

Следовательно, решение этой задачи показывает: *если число слагаемых бесконечно малых неограниченно возрастает, их сумма может оказаться любой величиной.*

40. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ при любом значении x.*

Решение. Каково бы ни было значение x, всегда найдутся такие два последовательных целых положительных числа k и $k+1$, между которыми заключается $|x|$, т. е. $k<|x|<k+1$. Исходя из этого, получим очевидное неравенство:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|=\left|\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdot\frac{x}{k+3}\cdots\frac{x}{n}\right|<\left|\frac{x^k}{k!}\right|\cdot\left|\frac{x}{k+1}\right|^{n-k}.$$

Первый множитель $M_1=\left|\frac{x^k}{k!}\right|$ не зависит от n и при любом данном значении x является постоянным; второй множитель $M_2=\left|\frac{x}{k+1}\right|^{n-k}$ при $n\to+\infty$ будет величиной бесконечно малой, ибо $\left|\frac{x}{k+1}\right|<1$. (См. решение задачи 28.)

*) $n!$ (n — факториал) есть произведение всех натуральных чисел от 1 до n; $n!=1\cdot2\cdot3\ldots n$.

Поэтому $M_1 \cdot M_2$, как произведение постоянной величины на бесконечно малую, есть величина бесконечно малая.

Вследствие этого функция $\frac{x^n}{n!}$ также будет величиной бесконечно малой, т. е. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ при любом значении x.

Найти следующие пределы:

41. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 5x + 6)$. **42.** $\lim\limits_{t \to 1} \frac{t^3 + 3^t}{\sqrt{t+3}}$.

43. $\lim\limits_{y \to 0} \frac{(2x-y)^3 - \sin y}{x^2 + y^2 + \operatorname{tg} 2y}$. **44.** $\lim\limits_{x \to \pi} 5 \sin \frac{3x}{x - \pi}$.

45. 1) $\lim\limits_{x \to -0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$; 2) $\lim\limits_{x \to +0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$.

46. Как изменяются внутренний угол α_n и апофема h_n правильного многоугольника, когда число его сторон n неограниченно возрастает?

§ 7. Вычисление пределов

Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет. Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

а) Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, ибо *предел элементарной функции $f(x)$ при x, стремящемся к значению a, которое входит в область ее определения, равен частному значению функции при $x = a$, т. е.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

47. Найти предел функции:

1) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ при $x \to -3$;

2) $\varphi(t) = t\sqrt{t^2 - 20} - \lg(t + \sqrt{t^2 - 20})$ при $t \to 6$.

Решение. Данная функция является элементарной, она определена в предельной точке, поэтому находим предел функции как ее частное значение в предельной точке:

1) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3) = (-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 4 = -74$;

2) $\lim\limits_{t \to 6} \varphi(t) = \varphi(6) = 6\sqrt{6^2 - 20} - \lg(6 + \sqrt{6^2 - 20}) = 23$.