Поэтому $M_1 \cdot M_2$, как произведение постоянной величины на бесконечно малую, есть величина бесконечно малая.

Вследствие этого функция $\frac{x^n}{n!}$ также будет величиной бесконечно малой, т. е. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ при любом значении x.

Найти следующие пределы:

41. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 5x + 6)$. **42.** $\lim\limits_{t \to 1} \frac{t^3 + 3^t}{\sqrt{t+3}}$.

43. $\lim\limits_{y \to 0} \frac{(2x-y)^3 - \sin y}{x^2 + y^2 + \operatorname{tg} 2y}$. **44.** $\lim\limits_{x \to \pi} 5 \sin \frac{3x}{x - \pi}$.

45. 1) $\lim\limits_{x \to -0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$; 2) $\lim\limits_{x \to +0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{8}{1 - 2^{\operatorname{ctg} x}}$.

46. Как изменяются внутренний угол α_n и апофема h_n правильного многоугольника, когда число его сторон n неограниченно возрастает?

§ 7. Вычисление пределов

Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет. Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

а) Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, ибо *предел элементарной функции $f(x)$ при x, стремящемся к значению a, которое входит в область ее определения, равен частному значению функции при $x = a$, т. е.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

47. Найти предел функции:

1) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ при $x \to -3$;

2) $\varphi(t) = t\sqrt{t^2 - 20} - \lg(t + \sqrt{t^2 - 20})$ при $t \to 6$.

Решение. Данная функция является элементарной, она определена в предельной точке, поэтому находим предел функции как ее частное значение в предельной точке:

1) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3) = (-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 4 = -74$;

2) $\lim\limits_{t \to 6} \varphi(t) = \varphi(6) = 6\sqrt{6^2 - 20} - \lg(6 + \sqrt{6^2 - 20}) = 23$.

Найти следующие пределы:

48. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x+1}$.

49. $\lim\limits_{x \to -1} (x^5 - 5^{x+1} + 3)$.

50. $\lim\limits_{x \to -2} \lg(2+2x+x^2-x^3)$.

51. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin x \sin 2x \sin 3x$.

б) Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

В простейших из этих случаев можно найти предел функции путем рассуждений, аналогичных тем, которые приведены в решениях задач § 5 и 6.

Путем таких рассуждений, основанных на свойствах пределов, получены следующие часто встречающиеся пределы:

(постоянная $a > 0$)

1. $\lim\limits_{x \to \infty} ax = \infty$.

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{a} = \infty$.

3. $\lim\limits_{x \to -0} \frac{a}{x} = -\infty$.

4. $\lim\limits_{x \to +0} \frac{a}{x} = +\infty$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{x} = \infty$.

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$.

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{если } |a| < 1 \\ +\infty, & \text{если } a > 1 \\ \infty, & \text{если } a < -1^*. \end{cases}$

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{если } |a| > 1 \\ +\infty, & \text{если } 0 < a < 1 \\ \infty, & \text{если } -1 < a < 0^*. \end{cases}$

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 1 \\ -\infty, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$

10. $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{если } a > 1 \\ +\infty, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (x есть радианная мера угла).

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2,71828$.

Этими простейшими пределами можно пользоваться как формулами.

---

* При $a < 0$ переменная x может принимать только целочисленные значения; для всех значений x при $a < 0$ функция a^x не определена.

Более сложные случаи нахождения предела функции: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ рассматриваются далее каждый в отдельности.

I. *Случай, когда при* $x \to a$ или $x \to \infty$ *функция* $f(x)$ *представляет отношение двух бесконечно малых величин* $\left(\text{случай } \frac{0}{0}\right)$.

Этот случай нахождения предела функции имеет особенно важное значение. Как будет выяснено впоследствии, нахождение предела отношения бесконечно малого изменения функции к бесконечно малому изменению аргумента является одним из основных средств для изучения функций.

Найти следующие пределы:

52. 1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$; 2) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$;

3) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}$; 4) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

Решение. Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой, что при указанном изменении аргумента она представляет отношение двух бесконечно малых величин $\left(\text{случай } \frac{0}{0}\right)$; затем делаем преобразования, чтобы сократить дробь на множитель, стремящийся к нулю.

1) Разлагаем знаменатель на множители и сокращаем дробь на $x-2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \lim \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

Здесь нет сокращения на нуль, что никогда недопустимо. Согласно определению предела функции аргумент x стремится к своему предельному значению 2, никогда с ним не совпадая. Поэтому здесь $x-2 \neq 0$.

Вообще, *если ищется предел функции при* $x \to a$, *то необходимо помнить, что* x *не принимает значения* a, *т. е. что* $x \neq a$ *и* $x-a \neq 0$.

2) Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители, как квадратные трехчлены, по формуле

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена. Затем сокращаем дробь на $x-5$:

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5} = \lim \frac{2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \lim \frac{2x-1}{3x+1} = \frac{9}{16}.$$

3) Сократим дробь, разделив на $x+2$ числител и знаменатель в отдельности:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2} = \lim \frac{x^4+x-5}{x^3+3x-1} = -\frac{3}{5}.$$

Вообще, *если ищется предел дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль в предельной точке* $x=a$, *то* согласно теореме Безу оба многочлена разделятся без остатка на $x-a$, т. е. *такую дробь всегда можно сократить на* $x-a$.

4) Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь на $1+\cos x$:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x} = \lim \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)} =$$

$$= \lim \frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x} = \frac{2}{3}.$$

53. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$; 4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Выяснив вначале, что при указанном изменении аргумента данная функция представляет отношение двух бесконечно малых величин $\left(\text{случай } \frac{0}{0}\right)$, преобразуем затем дробь так, чтобы сократить ее на множитель, стремящийся к нулю:

1) уничтожаем иррациональность в числителе путем умножения числителя и знаменателя на $1+\sqrt{x+1}$, затем сокращаем дробь на x:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim \frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim \frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim \frac{-1}{1+\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2};$$

2) умножаем числитель и знаменатель на произведение

$$(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})$$

и затем сокращаем дробь на $4-x$:

$$\lim_{x \to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} = \lim \frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})} = \lim \frac{3+\sqrt{2x+1}}{2(2+\sqrt{x})} = \frac{3}{4};$$

3) умножаем числитель и знаменатель на $1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$ и сокращаем дробь на $\operatorname{tg} x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}} = \lim \frac{\operatorname{tg} x(1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x})}{1-1-\operatorname{tg} x} =$$

$$= -\lim(1+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}) = -2;$$

4) умножаем числитель и знаменатель на произведение

$$(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}),$$

затем сокращаем дробь на $1-x$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}.$$

Иначе можно решить эту задачу путем замены переменной. Полагая $x=t^6$, получим $t\to 1$, когда $x\to 1$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to 1}\frac{1-t^3}{1-t^2}=\lim\frac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)}=\lim\frac{1+t+t^2}{1+t}=\frac{3}{2}.$$

54. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{arc\,tg}(x+2)}$.

Решение. Устанавливаем, что данная функция не определена в предельной точке, что при заданном изменении аргумента она представляет отношение двух бесконечно малых величин $\left(\text{случай } \frac{0}{0}\right)$. После этого подвергаем функцию преобразованиям с тем, чтобы использовать *1-й замечательный предел:*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 \quad (\alpha\text{ — радианная мера угла}).$$

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

2) Применяем тригонометрическую формулу $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=2\left(\lim\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=2\cdot 1=2.$$

3) Здесь, чтобы использовать 1-й замечательный предел, сделаем замену переменной: $1-x=t$. Тогда при $x\to 1$ будет $t\to 0$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=\lim\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$$

4) Полагая $\operatorname{arc\,tg}(x+2)=v$, получим $x+2=\operatorname{tg} v$, $v\to 0$, когда $x\to -2$, и

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arc\,tg}(x+2)}=\lim_{v\to 0}\frac{(\operatorname{tg} v-2)^2-4}{v}=\lim\frac{(\operatorname{tg} v-4)\operatorname{tg} v}{v}=$$

$$=\lim\frac{\operatorname{tg} v-4}{\cos v}\cdot\lim\frac{\sin v}{v}=-4\cdot 1=-4.$$

55. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x}$.

56. $\lim\limits_{x\to -a}\frac{a^2-x^2}{a^3+x^3}$.

57. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.

58. $\lim\limits_{t\to 1}\frac{3t^2-t-2}{2t^2+5t-7}$.

59. $\lim\limits_{y\to -2}\frac{2y^2+5y+2}{2y^3+7y^2+6y}$.

60. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi-\cos\varphi}$.

61. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1-3^{2\alpha}}{3^{\alpha}-1}$.

62. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}}$.

63. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$.

64. $\lim\limits_{p\to -1}\frac{p+1}{1-\sqrt{1+p+p^2}}$.

65. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

66. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sin(x-a)}$.

67. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

68. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$.

69*. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$.

70*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}$.

II. *Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет отношение двух бесконечно больших величин $\left(\text{случай } \frac{\infty}{\infty}\right)$.*

Найти пределы:

71. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}$;

2) $\lim\limits_{n\to -\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{1+7^{n+2}}{3-7^n}$;

4) $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$;

6)* $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\frac{\infty}{\infty}$, подвергаем функцию преобразованиям.

1) Деля числитель и знаменатель дроби на x^2 (наивысшая здесь степень x), находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim\frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3-0}{5+0}=\frac{3}{5},$$

так как при $x \to \infty$ величины $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x}$ являются бесконечно малыми. Эту задачу можно решить иначе, посредством замены переменной. Полагая $x = \frac{1}{\alpha}$, получим: $\alpha \to 0$, когда $x \to \infty$ и

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{3}{\alpha^2} - 1}{\frac{5}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha}} = \lim \frac{3 - \alpha^2}{5 + 2\alpha} = \frac{3}{5}.$$

Вообще, *предельный переход при $x \to \infty$ всегда может быть заменен предельным переходом при $\alpha \to 0$, если за новую независимую переменную принять величину, обратную первоначальной переменной*, т. е. если положить $\alpha = \frac{1}{x}$.

2) Эту задачу можно решить теми же двумя способами, что и предыдущую.

Деля числитель и знаменатель на n, получим

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{-1} = -1,$$

или, полагая $n = \frac{1}{\alpha}$, найдем $\alpha \to -0$ при $n \to -\infty$, и

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{\alpha \to -0} \frac{\frac{1}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 1}} = \lim \frac{1}{-\sqrt{1 + \alpha^2}} = -1.$$

Здесь появляется минус вследствие внесения под знак квадратного радикала (в первом решении) или вынесения за этот знак (во втором решении) отрицательного делителя, ибо если $a < 0$, то

$$a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b} \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}.$$

Из этого решения следует, что при $n \to +\infty$ предел данной функции будет равен единице, а при $n \to \infty$ предел этой функции не существует.

3) Умножая числитель и знаменатель дроби на 7^{-n}, получим

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + 7^{n+2}}{3 - 7^n} = \lim \frac{7^{-n} + 7^2}{3 \cdot 7^{-n} - 1} = \frac{0 + 49}{0 - 1} = -49,$$

так как $\lim\limits_{n \to +\infty} 7^{-n} = 7^{-\infty} = 0$.

4) Здесь числитель дроби есть сумма n членов арифметической прогрессии, а знаменатель есть сумма $n + 1$ членов другой арифметической прогрессии. Преобразуя их по известной формуле,

получим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}=$$

$$=\lim\frac{\frac{2+2n}{2}n}{\frac{1+2n+1}{2}(n+1)}=\lim\frac{n}{n+1}=\lim\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

5) Тождественно преобразуем дробь так, чтобы затем сократить ее на множитель, стремящийся к нулю:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim\frac{\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\lim\frac{\sin 2x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\lim\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}=$$

$$=\frac{1}{1}\cdot\lim\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\lim\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=-\frac{1}{2}.$$

6)* Преобразуя знаменатель с помощью формулы для суммы квадратов натурального ряда чисел:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

получим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}=\lim\frac{6n^3}{n(n+1)(2n+1)}=$$

$$=\lim\frac{6}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}=3.$$

72. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-1}{3x^2-x+1}$.

73. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^2}{x^3+3}$.

74. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$.

75. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt{2x^2-1}}{x}$.

76. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{10^n-2}{10^{n+1}+5}$.

77. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-1}{1+2+3+\ldots+n}$.

III. *Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую (случай $0\cdot\infty$).*

Этот случай нахождения предела функции приводится путем преобразования функции к одному из двух рассмотренных случаев, т. е. к случаю $\frac{0}{0}$ или к случаю $\frac{\infty}{\infty}$.

Найти пределы:

78. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{3}{4}\pi+x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\operatorname{arcctg} x$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x\right)$.

Решение. Установив, что при указанном изменении аргумента функция представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую (случай $0\cdot\infty$), преобразуем ее к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности.

$$1)\ \lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=\lim\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\lim\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=1\cdot\lim\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{2}{\pi}\cdot 1=\frac{2}{\pi}.$$

Здесь можно было решать другим путем, заменив переменную. Полагая $1-x=\alpha$, получим

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{\alpha\to 0}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\alpha}{2}\right)=\lim\alpha\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}=$$

$$=\lim\frac{\alpha\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}=\lim\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\lim\frac{\alpha}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}=1\cdot\frac{2}{\pi}\lim\frac{\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

2) Полагая $\frac{\pi}{4}-x=t$, получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{3}{4}\pi+x\right)=\lim_{t\to 0}t\operatorname{cosec}(\pi-t)=\lim\frac{t}{\sin t}=1.$$

3) Полагая $\operatorname{arcctg} x=\alpha$, имеем $x=\operatorname{ctg}\alpha$ и

$$\lim_{x\to+\infty}x\operatorname{arcctg} x=\lim_{\alpha\to+0}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\lim\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=\lim\cos\alpha\cdot\lim\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

4) Положим $\operatorname{arc\,tg} x = z$, тогда $x = \operatorname{tg} z$ и

$$\lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} x\right) = \lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} + z\right) \operatorname{tg} z = \lim \frac{\left(\frac{\pi}{2} + z\right) \sin z}{\cos z} =$$

$$= \lim \sin z \cdot \lim \frac{\frac{\pi}{2} + z}{\cos z} = -1 \cdot \lim \frac{\frac{\pi}{2} + z}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right)} = -1 \cdot 1 = -1.$$

79. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} 2x$.

80. $\lim\limits_{x \to \pi} \sin 2x \operatorname{ctg} x$.

81. $\lim\limits_{n \to \infty} n \sin \frac{x}{n}$.

82. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \operatorname{tg} 2^{-n}$.

IV. *Случай, когда при $x \to a$ или $x \to \infty$ функция $f(x)$ представляет разность двух положительных бесконечно больших величин (случай $\infty - \infty$).*

Этот случай нахождения предела функции можно привести к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем преобразования функции к виду дроби.

Найти пределы:

83. 1) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right)$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$;

3) $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2} - 0} (\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \sec \alpha} - \operatorname{tg} \alpha)$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} (2 \operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} x)$.

Решение. Анализируя условие задачи, заключаем, что при указанном поведении аргумента функция представляет разность двух положительных бесконечно больших величин (случай $\infty - \infty$).

После этого преобразуем данную функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Тем самым данный случай нахождения предела функции $\infty - \infty$ сводится к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

1) Производим вычитание дробей и полученную в результате дробь сокращаем на $x - 2$:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right) = \lim \frac{x-2}{x^2-4} = \lim \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

2) Рассматривая данную функцию как дробную, со знаменателем, равным единице, избавимся от иррациональности в числителе и затем разделим числитель и знаменатель дроби

на x:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})=\lim\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=\frac{-5}{1+1}=-\frac{5}{2}.$$

3) Как и в предыдущей задаче, переводим иррациональность в знаменатель, затем умножаем числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$:

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}-0}(\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\sec\alpha}-\operatorname{tg}\alpha)=\lim\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\sec\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

4) Тождественно преобразуем данную функцию к виду дроби, затем сокращаем дробь на $\sin x$:

$$\lim_{x\to 0}(2\operatorname{cosec}2x-\operatorname{ctg}x)=\lim\left(\frac{2}{\sin 2x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$=\lim\frac{2-2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\lim\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\lim\operatorname{tg}x=0.$$

84. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1})$.

85. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})$.

86. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right)$.

87. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x-\sec x)$.

V. *Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности (случай 1^∞).*

В этом случае для нахождения предела функции используется 2-й замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Число e — иррациональное; $e=2{,}7182818\ldots$ *Логарифмы с основанием e называются натуральными* и обозначаются ln. Натуральные и десятичные логарифмы чисел связаны формулами:

$$\lg x=M\ln x,\qquad \ln x=\frac{1}{M}\lg x,$$

где $M=\lg e=0{,}43429\ldots,\quad \frac{1}{M}=\ln 10=2{,}30258\ldots$

Найти пределы:

88. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

Решение. Убедившись сначала, что при указанном изменении аргумента функция представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности (случай 1^∞), далее преобразуем функцию так, чтобы использовать 2-й замечательный предел.

1) Полагая $n=ax$, получим $x\to\infty$, когда $n\to\infty$, и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=\lim\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a=$$
$$=\left[\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a=e^a.$$

Возможно и другое решение без замены переменной:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a=\left[\lim_{\frac{n}{a}\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a=e^a.$$

2) Полагая $-2x=\alpha$, найдем $\alpha\to 0$, когда $x\to 0$, и

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}}=[\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{-2}=e^{-2}.$$

3) Исключив целую часть из дроби, полагаем $-\frac{5}{t+2}=x$:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}=\lim\left(1-\frac{5}{t+2}\right)^{2t+1}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{10}{x}-3}=$$
$$=[\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{-10}\cdot\lim(1+x)^{-3}=e^{-10}\cdot 1=e^{-10}.$$

4) Полагая $\operatorname{tg}x=1+\alpha$, получим $\alpha\to 0$, когда $x\to\frac{\pi}{4}$, и

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=-\frac{2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+2)},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=\lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{-\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2}}=e^{-1},$$

так как

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2}=1.$$

89. $\lim\limits_{x \to 0}(1+kx)^{\frac{n}{x}}$.

90. $\lim\limits_{t \to \infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^t$.

91. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$.

92. $\lim\limits_{x \to \pi}(1+3\,\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{ctg}\,x}$.

§ 8. Смешанные задачи на нахождение пределов

Найти пределы:

93. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$.

94. $\lim\limits_{n \to \infty}\frac{n}{n+\sqrt[3]{n^3+1}}$.

95. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

96. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin ax}{\mathrm{tg}\,bx}$.

97. $\lim\limits_{x \to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

98. $\lim\limits_{x \to -1}\frac{\sin(x+1)}{1-x^2}$.

99. $\lim\limits_{u \to -2}\frac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}$.

100. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}}\frac{x(1-\mathrm{tg}\,x)}{\cos 2x}$.

101. $\lim\limits_{h \to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

102. $\lim\limits_{t \to 1-0}\frac{\arccos t}{t-1}$.

103. $\lim\limits_{x \to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$.

104. $\lim\limits_{x \to 3}\frac{x^4-18x^2+81}{2x^2-3x-9}$.

105. $\lim\limits_{p \to 2}\frac{p^5-2p^4+p^2-3p+2}{p^3-2p^2+3p-6}$.

106. $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

107. $\lim\limits_{x \to 0}\sin 3x\,\mathrm{ctg}\,5x$.

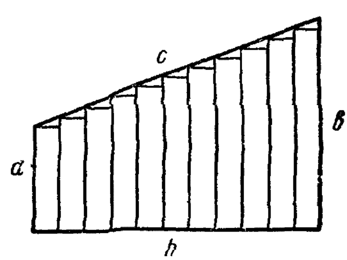
108. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$.

109*. $\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

110*. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}^2 x}$.

111. Как изменяются корни x_1 и x_2 полного квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, когда коэффициент $a \to 0$? ($b \neq 0$ и c — постоянные).

112. Прямоугольная трапеция разделена прямыми, параллельными ее основаниям, на n равных по высоте малых трапеций, и в каждую из них вписан прямоугольник (черт. 20). Как будут изменяться площадь S_n и периметр P_n полученной ступенчатой фигуры, когда $n \to +\infty$?



Черт. 20