§ 9. Сравнение бесконечно малых

Чтобы сравнить между собой бесконечно малые величины α и β, находят предел их отношения. При этом:

1) *если* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, *то* α *называется бесконечно малой высшего порядка, чем* β;

2) *если* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$, *то* α *называется бесконечно малой низшего порядка, чем* β;

3) *если* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A\,(A\neq 0$ и $A\neq\infty)$, *то* α *называется бесконечно малой того же порядка, что и* β;

4) *если* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, *то* α *и* β *называются эквивалентными бесконечно малыми*. Эквивалентность бесконечно малых α и β обозначается знаком приближенного равенства: $\alpha\approx\beta$.

Эквивалентные бесконечно малые обладают следующими свойствами:

I. Разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка, чем каждая из них.

II. При нахождении предела отношения двух бесконечно малых можно каждую (или только одну) из них заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной, т. е. если $\alpha\approx\alpha_1$ и $\beta\approx\beta_1$, то

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

113. Если $x\to 0$, то какие из следующих бесконечно малых:

1) $10x$; 2) x^3; 3) $\sqrt{3x}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{x}{5}$; 5) $\lg(1+x)$ имеют порядок высший, чем x, низший, чем x, и тот же, что x?

Решение. Находим предел отношения каждой данной бесконечно малой к бесконечно малой x:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10x}{x}=10.$

Следовательно, $10x$ есть бесконечно малая того же порядка, что x;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim x^2=0;$

x^3 есть бесконечно малая высшего порядка, чем x;

3) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sqrt{3x}}{x}=\lim\sqrt{\frac{3}{x}}=+\infty;$

$\sqrt{3x}$ есть бесконечно малая низшего порядка, чем x;

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{5}}{x}=\lim\frac{\sin\frac{x}{5}}{x\cos\frac{x}{5}}=\lim\frac{\sin\frac{x}{5}}{x}\cdot\lim\frac{1}{\cos\frac{x}{5}}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim\frac{\sin\frac{x}{5}}{\frac{x}{5}}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{1}{5};$$

$\operatorname{tg}\frac{x}{5}$ есть бесконечно малая того же порядка, что x;

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\lg(1+x)}{x}=\lim\lg(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lg e;$$

$\lg(1+x)$ есть бесконечно малая того же порядка, что x.

114. Доказать, что при $x\to 0$:

1) $\sin ax\approx ax$; 2) $\operatorname{tg} ax\approx ax$; 3) $\arcsin ax\approx ax$;

4) $\operatorname{arctg} ax\approx ax$; 5) $\sqrt{1+x}-1\approx\frac{1}{2}x$.

Решение. Чтобы доказать эквивалентность двух бесконечно малых, нужно найти предел их отношения. Если этот предел окажется равным единице, то бесконечно малые эквивалентны.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=\lim_{ax\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1.$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{ax}=\lim\frac{\sin ax}{ax\cos ax}=\lim_{ax\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim\frac{1}{\cos ax}=1\cdot 1=1.$$

3) Полагая $\arcsin ax=\alpha$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{ax}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

4) Полагая $\operatorname{arctg} ax=z$, найдем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} ax}{ax}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{tg} z}=\lim\frac{z}{\sin z}\lim\cos z=1.$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=2\lim\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

115. Пользуясь тем, что при отыскании предела отношения двух бесконечно малых можно заменять их эквивалентными бесконечно малыми (свойство II), найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2 \frac{x}{3}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin 2x}{(\operatorname{arctg} 5x)^2}$; 4)* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin \frac{2}{n^3} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \arcsin \frac{5}{n}}$.

Решение. Пользуясь тем, что $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \arcsin\alpha \approx \approx \operatorname{arctg}\alpha \approx \alpha$ при $\alpha \to 0$, что следует из решения задачи 114, и применяя указанное свойство эквивалентных бесконечно малых, получим:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2 \frac{x}{3}} = \lim \frac{(2x)^2}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} = 36$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin 2x}{(\operatorname{arctg} 5x)^2} = \lim \frac{x}{5x} \cdot \frac{2x}{5x} = \frac{2}{25}$;

4)* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin \frac{2}{n^3} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \arcsin \frac{5}{n}} = \lim \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{3}{n\sqrt{n}}}{\frac{2}{n^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{5}{n}} =$

$$= \lim \frac{3n^4\sqrt{n}}{10n^4\sqrt{n}} = 0{,}3.$$

116. Доказать, что при $x \to 0$:

1) $\sqrt{6x+1} - 1 \approx 3x$; 2) $\sin x + \operatorname{tg} x \approx 2x$;

3) $\sqrt[3]{x+8} - 2 \approx \frac{x}{12}$; 4) $1 - \cos \frac{x}{m} \approx \frac{x^2}{2m^2}$.

117. Пользуясь свойством эквивалентных бесконечно малых, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x + x^2}$; 2) $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sqrt{2x} - x}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 6x}$; 4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2 - 1}$;

5) $\lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2\varphi \arcsin 3\varphi}{\sin 3\varphi \operatorname{arctg} 2\varphi}$; 6) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$.

§ 10. Непрерывность и точки разрыва функции

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента $x - x_0 = \Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $y - y_0 = \Delta y$,