бесконечно малыми (свойство II), найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2\frac{x}{3}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{(\operatorname{arctg} 5x)^2}$; 4)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{tg}^3\frac{1}{n}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin\frac{2}{n^3}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\arcsin\frac{5}{n}}$.

Решение. Пользуясь тем, что $\sin\alpha\approx\operatorname{tg}\alpha\approx\arcsin\alpha\approx\approx\operatorname{arctg}\alpha\approx\alpha$ при $\alpha\to 0$, что следует из решения задачи 114, и применяя указанное свойство эквивалентных бесконечно малых, получим:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}=\lim\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2\frac{x}{3}}=\lim\frac{(2x)^2}{\left(\frac{x}{3}\right)^2}=36$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{(\operatorname{arctg} 5x)^2}=\lim\frac{x}{5x}\cdot\frac{2x}{5x}=\frac{2}{25}$;

4)* $$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{tg}^3\frac{1}{n}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin\frac{2}{n^3}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\arcsin\frac{5}{n}}=\lim\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3\cdot\frac{3}{n\sqrt{n}}}{\frac{2}{n^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{5}{n}}=$$
$$=\lim\frac{3n^4\sqrt{n}}{10n^4\sqrt{n}}=0{,}3.$$

116. Доказать, что при $x\to 0$:

1) $\sqrt{6x+1}-1\approx 3x$; 2) $\sin x+\operatorname{tg} x\approx 2x$;

3) $\sqrt[3]{x+8}-2\approx\frac{x}{12}$; 4) $1-\cos\frac{x}{m}\approx\frac{x^2}{2m^2}$.

117. Пользуясь свойством эквивалентных бесконечно малых, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x+x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sqrt{2x}-x}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 6x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2-1}$;

5) $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2\varphi\arcsin 3\varphi}{\sin 3\varphi\operatorname{arctg} 2\varphi}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$.

§ 10. Непрерывность и точки разрыва функции

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента $x-x_0=\Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $y-y_0=\Delta y$, т. е. если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Этому определению равносильно следующее:

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если при $x \to x_0$ предел функции существует и равен ее частному значению в этой точке, т. е. если $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) *функция должна быть определена в некотором интервале, содержащем точку x_0 (т. е. в самой точке x_0 и вблизи этой точки)*;

2) *функция должна иметь одинаковые односторонние пределы* $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

3) *эти односторонние пределы должны быть равны $f(x_0)$.*

Функция $f(x)$ называется разрывной в точке x_0, если она определена в сколь угодно близких точках, но в самой точке x_0 не удовлетворяет хотя бы одному из условий непрерывности.

Разрыв функции $f(x)$ в точке x_0 называется конечным, или 1-го рода, если существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Все другие случаи разрыва функции называются разрывами 2-го рода; в частности, если хотя бы один из указанных односторонних пределов окажется бесконечным, то и разрыв функции называется бесконечным.

Скачком функции $f(x)$ в точке разрыва x_0 называется разность ее односторонних пределов $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$, если они различны.

Если точка x_0 является левой или правой границей области определения функции $f(x)$, то следует рассматривать значения функции соответственно только справа или только слева от этой точки и в самой точке. При этом:

1) если граничная точка x_0 входит в область определения функции, то она будет точкой непрерывности или точкой разрыва функции, смотря по тому, будет ли предел функции при $x \to x_0$ изнутри ее области определения равен или не равен $f(x_0)$;

2) если граничная точка x_0 не входит в область определения функции, то она является точкой разрыва функции.

Функция называется непрерывной в некотором интервале, если она непрерывна во всех точках этого интервала.

Все элементарные функции непрерывны в тех интервалах, в которых они определены.

При отыскании точек разрыва функции можно руководствоваться следующими положениями:

1. Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках, но не может быть разрывной во всех точках какого-либо интервала.

2. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, где она не определена, при условии, если она будет определена хотя бы с одной стороны от этой точки в сколь угодно близких к ней точках.

3. Неэлементарная функция может иметь разрывы как в точках, где она не определена, так и в точках, где она определена; в частности, *если функция задана несколькими различными аналитическими выражениями (формулами) для различных интервалов изменения аргумента, то она может иметь разрывы в тех точках, где меняется ее аналитическое выражение**.

118. Показать, что элементарные функции: 1) $y=2x^2-1$; 2) $v=\operatorname{cosec} x$ непрерывны во всей своей области определения.

Решение. Найдем область определения функции и затем убедимся, исходя из определения непрерывности, что функция будет непрерывна в этой же области.

1) Областью определения функции y является вся числовая ось. Далее, придадим аргументу x произвольное приращение Δx и, подставив в данное выражение функции вместо x наращенное значение $x+\Delta x$, найдем наращенное значение функции:

$$y+\Delta y=2(x+\Delta x)^2-1.$$

Вычитая из этого наращенного значения функции ее первоначальное значение, найдем приращение функции:

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^2-1-(2x^2-1)=4x\Delta x+2\Delta x^2.$$

Пусть теперь $\Delta x\to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ при любом значеиии x. Следовательно, согласно определению непрерывности, функция y будет непрерывна при любом значении x, т. е. во всей своей области определения.

2) Тригонометрическая функция $\operatorname{cosec} x$ определена на всей числовой оси, за исключением точек $x=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Повторяя указанные выше рассуждения, найдем приращение функции Δv и затем его предел при $\Delta x\to 0$:

$$\Delta v=\operatorname{cosec}(x+\Delta x)-\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin(x+\Delta x)}-\frac{1}{\sin x}=$$

$$=\frac{\sin x-\sin(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)\sin x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin(x+\Delta x)\sin x};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=\lim\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin(x+\Delta x)\sin x}\cdot\lim\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{2\cos x}{\sin^2 x}\cdot 0=0$$

при всех значениях x, кроме $x=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

* Неэлементарные функции могут иметь весьма сложную структуру и могут быть определены и вместе с тем разрывны в каждой точке числовой оси.

Следовательно, область непрерывности и область определения элементарной функции $\operatorname{cosec} x$ полностью совпадают.

119. Дана функция. Найти ее точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

1) $f_1(x)=\frac{1}{x^2-4}$; 2) $f_2(x)=\frac{3x-5}{x^2+2x+10}$;

3) $f_3(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$; 4) $f_4(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$; 5) $f_5(x)=\lg(x^2+3x)$.

Решение. 1) Функция $f_1(x)$ определена, т. е. может быть вычислена при всех значениях x, кроме $x=\pm 2$. Эта функция элементарная, поэтому она непрерывна во всей области своего определения: $-\infty<x<-2$, $-2<x<2$, $2<x<+\infty$. Она не определена в точках $x_1=-2$ и $x_2=2$, но определена вблизи этих точек. Вследствие этого, ввиду несоблюдения 1-го условия непрерывности, данная функция в точках x_1 и x_2 имеет разрывы.

Для определения скачка функции в найденных ее точках разрыва вычислим односторонние пределы этой функции при стремлении аргумента x к точкам разрыва слева и справа:

$$\text{а)} \lim_{x\to -2-0}\frac{1}{x^2-4}=+\infty,$$

так как при $x\to -2-0$ величина x^2-4 является положительной бесконечно малой, а обратная ей величина $\frac{1}{x^2-4}$ является положительной бесконечно большой;

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{1}{x^2-4}=-\infty,$$

так как при $x\to -2+0$ величина x^2-4 является отрицательной бесконечно малой, а обратная ей величина является отрицательной бесконечно большой.

Следовательно, в точке $x=-2$ функция имеет бесконечный разрыв (черт. 21).

$$\text{б)} \lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x^2-4}=-\infty,$$

так как при $x\to 2-0$ величина x^2-4 есть отрицательная бесконечно малая, а обратная ей величина есть отрицательная бесконечно большая;

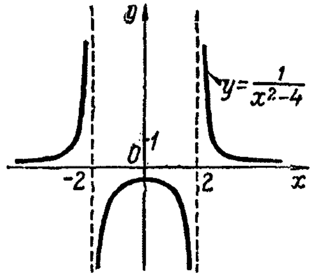
$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x^2-4}=+\infty,$$

так как при $x\to 2+0$ величина x^2-4 есть положительная бесконечно малая, а обратная ей величина есть положительная бесконечно большая.

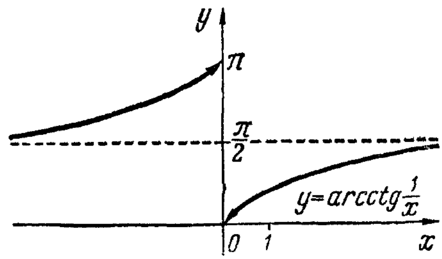
Следовательно, и в точке $x=2$ разрыв функции бесконечный.

2) Элементарная функция $f_2(x)$ определена на всей числовой оси (хотя она дробная, но корни знаменателя комплексные). Поэтому она и непрерывна на всей числовой оси, т. е. не имеет точек разрыва.

3) Элементарная функция $f_3(x)$ определена, а следовательно, и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. В точке $x=0$ функция имеет разрыв, поскольку она определена в любой окрестности этой точки, за исключением самой точки.



Черт. 21



Черт. 22

Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \to -0} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arcctg}(-\infty) = \pi;$$

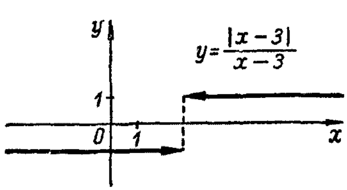
$$\lim_{x \to +0} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arcctg}(+\infty) = 0.$$

Следовательно, разрыв функции конечный (черт. 22); при $x=0$ она имеет конечный скачок

$$\lim_{x \to +0} f_3(x) - \lim_{x \to -0} f_3(x) = 0 - \pi = -\pi.$$

4) Функция $f_4(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=3$. Из этого следует, что в точке $x=3$ функция имеет разрыв.

Исследуем эту точку разрыва:



Черт. 23

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{|x-3|}{x-3} = -1,$$

так как при всяком значении $x<3$ эта функция равна -1;

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{|x-3|}{x-3} = 1,$$

так как при всяком значении $x>3$ эта функция равна $+1$.

Следовательно, в точке $x=3$ функция имеет конечный разрыв (черт. 23); ее скачок в этой точке разрыва конечный:

$$\lim_{x\to 3+0} f_4(x)-\lim_{x\to 3-0} f_4(x)=1-(-1)=2.$$

5) Логарифмическая функция $y=\lg u$ определена только для положительных значений своего аргумента u. Поэтому элементарная функция $f_5(x)=\lg(x^2+3x)$ будет определена и непрерывна для значений x, удовлетворяющих неравенству $x^2+3x>0$. Решая это неравенство, найдем область определения и область непрерывности функции,— она будет состоять из двух интервалов числовой оси:

$$-\infty<x<-3 \text{ и } 0<x<+\infty.$$

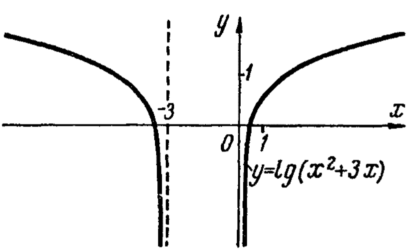
Во всех точках отрезка $-3\leqslant x\leqslant 0$ данная функция не определена, однако точками ее разрыва являются только граничные точки $x=-3$ и $x=0$. В этих граничных точках функция не определена, но она определена в сколь угодно близких точках слева от точки $x=-3$ и справа от точки $x=0$. Все остальные внутренние точки отрезка $[-3; 0]$, в которых функция также не определена, как и в точках $x=-3$ и $x=0$, не являются точками разрыва потому, что вблизи этих внутренних точек функция не определена.

Точка, в которой функция не определена, будет точкой разрыва функции лишь при условии, если функция определена, хотя бы с одной стороны вблизи этой точки.

Найдя односторонние пределы функции при стремлении x к точкам разрыва изнутри области определения функции

$$\lim_{x\to -3-0}\lg(x^2+3x)=\lg 0=-\infty;\quad \lim_{x\to +0}\lg(x^2+3x)=\lg 0=-\infty,$$

заключаем, что в точках $x=-3$ и $x=0$ функция имеет бесконечные разрывы (черт. 24).



Черт. 24

120. Для каждой из следующих функций найти точки разрыва, если они существуют, найти скачок функции в каждой точке разрыва и построить график:

1) $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x\leqslant 2 \\ x & \text{при } x>2; \end{cases}$

2) $\varphi(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 4-2x & \text{при } 1<x<2{,}5 \\ 2x-7 & \text{при } 2{,}5\leqslant x<+\infty; \end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{при } -\infty<x<-1 \\ \frac{1}{x} & \text{при } -1\leqslant x<+\infty. \end{cases}$

Решение. 1) *Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Но из этого не следует, что она и непрерывна на всей числовой оси, так как эта функция неэлементарная*; она задана двумя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрыв в точке $x=2$, где меняется ее аналитическое выражение.

Исследуя точку $x=2$, находим односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа:

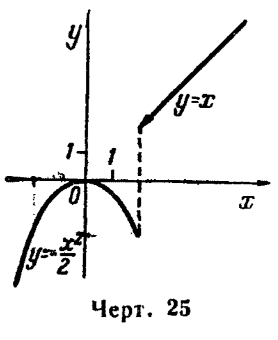
$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-2,$$

так как слева от точки $x=2$ функция $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$;

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim x=2,$$

так как справа от точки $x=2$ функция $f(x)=x$.

Левый и правый пределы функции конечны, но не равны между собой. Поэтому, вследствие невыполнения 2-го условия непрерывности, в точке $x=2$ функция имеет разрыв (конечный).



Черт. 25

В этой точке разрыва функция имеет конечный скачок:

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)-\lim_{x\to 2-0} f(x)=2-(-2)=4.$$

Во всех остальных точках числовой оси функция $f(x)$ непрерывна, так как обе формулы, которыми она задана, определяют собой элементарные непрерывные функции.

График этой функции показан на черт. 25.

2) Неэлементарная функция $\varphi(x)$ определена для всех значений $x\geqslant 0$. Она может иметь разрыв в точках $x=1$ и $x=2{,}5$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция $\varphi(x)$ непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет

собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x.

Исследуем точки $x=1$ и $x=2{,}5$:

а) $\lim\limits_{x\to 1-0} \varphi(x)=\lim 2\sqrt{x}=2$; $\lim\limits_{x\to 1+0} \varphi(x)=\lim(4-2x)=2$.

Согласно условию значение функции $\varphi(x)$ в точке $x=1$ определяется первой формулой

$$\varphi(1)=2\sqrt{1}=2.$$

Следовательно, в точке $x=1$ выполняются все условия непрерывности: функция определена в окрестности точки $x=1$ и

$$\lim_{x\to 1-0}\varphi(x)=\lim_{x\to 1+0}\varphi(x)=\varphi(1).$$

Поэтому в точке $x=1$ функция $\varphi(x)$ непрерывна.

б) $\lim\limits_{x\to 2,5-0} \varphi(x)=\lim(4-2x)=-1$; $\lim\limits_{x\to 2,5+0} \varphi(x)=\lim(2x-7)=-2$.

Здесь левый и правый пределы функции конечны, но не одинаковы, т. е. не выполняется 2-е условие непрерывности. Поэтому в точке $x=2{,}5$ функция имеет разрыв (конечный), черт. 26.

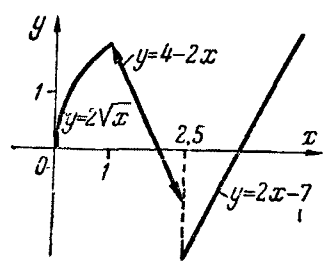
Скачок функции в точке разрыва конечный:

$$\lim_{x\to 2,5+0}\varphi(x)-\lim_{x\to 2,5-0}\varphi(x)=-2-(-1)=-1.$$

3) Неэлементарная функция $F(x)$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. Это значит, что в точке $x=0$ функция разрывна. Исследуем эту точку:

$$\lim_{x\to -0} F(x)=\lim\frac{1}{x}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to +0} F(x)=\lim\frac{1}{x}=+\infty.$$



Черт. 26

Следовательно, в точке $x=0$ функция $F(x)$ имеет бесконечный разрыв.

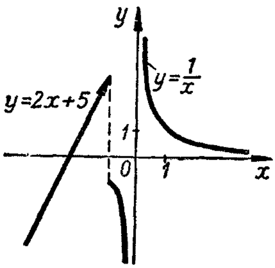
Исследуем далее точку $x=-1$. Поскольку функция $F(x)$ неэлементарная, она может иметь разрыв в этой точке, где меняется ее аналитическое выражение:

$$\lim_{x\to -1-0} F(x)=\lim(2x+5)=3, \qquad \lim_{x\to -1+0} F(x)=\lim\frac{1}{x}=-1.$$

Найденные односторонние пределы функции конечные, но различные. Поэтому в точке $x=-1$ функция имеет конечный разрыв; ее конечный скачок в этой точке равен

$$\lim_{x\to -1+0} F(x) - \lim_{x\to -1-0} F(x) = -4.$$

Во всех остальных точках числовой оси функция $F(x)$ непрерывна; ее график показан на черт. 27.



Черт. 27

121. Для следующих элементарных функций: 1) $y=x^3-2x$; 2) $z=\sqrt{x}$; 3) $u=\frac{1}{x^2-9}$; 4) $v=\cos 2x$ проверить, что область непрерывности функции совпадает с областью ее определения.

122. Дана функция. Найти ее точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

1) $y=\frac{1}{x^3-3x^2-4x}$; 2) $y=\frac{x^2-x^3}{|x-1|}$; 3) $y=\lg(2x+1)$;

4) $y=\arcsin\frac{1}{x}$; 5) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; 6)* $y=\frac{x}{\cos x}$.

123. Для каждой из следующих функций:

1) $y=\frac{4}{x^2-2x+1}$; 2) $y=x+\frac{x+2}{|x+2|}$;

3) $y=\frac{2|x-1|}{x^2-x^3}$; 4) $y=\sqrt[x]{2}-1$;

5) $y=\begin{cases} -x & \text{при } x\leqslant -1 \\ \frac{2}{x-1} & \text{при } x>-1; \end{cases}$ 6)* $y=\begin{cases} 1-x^2 & \text{при } x<0 \\ (x-1)^2 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 4-x & \text{при } x>2 \end{cases}$

найти точки разрыва, скачок функции в каждой точке разрыва и построить график.