ГЛАВА II

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

§ 1. Производная функции и ее геометрическое значение Непосредственное нахождение производной

Производной функции $y=f(x)$ называется предел отношения ее приращения Δy к соответствующему приращению Δx независимой переменной, когда $\Delta x \to 0$:

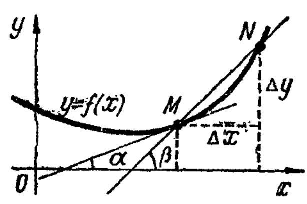
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (*)$$

Производная обозначается y' или $f'(x)$, или $\frac{dy}{dx}$.

Нахождение производной называется **дифференцированием**.

Геометрически производная y' функции $y=f(x)$ представляет угловой коэффициент касательной к графику этой функции (черт. 28):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta; \quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha.$$



Черт. 28

Функция называется дифференцируемой в некоторой точке x, если в этой точке она имеет определенную производную, т. е. если предел (*) существует и имеет одно и то же значение при $\Delta x \to 0$ любым способом; при этом функция будет и непрерывной в этой точке.

Непрерывность функции есть необходимое (но недостаточное) условие дифференцируемости функции. Функция, непрерывная в некоторой точке x, может быть и недифференцируемой в этой точке.

Простейшие случаи недифференцируемости непрерывной функции $y=f(x)$ изображены на черт. 29.

В точке a при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет предела, но имеет различные односторонние пределы при $\Delta x \to -0$ и $\Delta x \to +0$, которые называются односторонними (левой и правой) производными:

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(-)} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(+)}$$

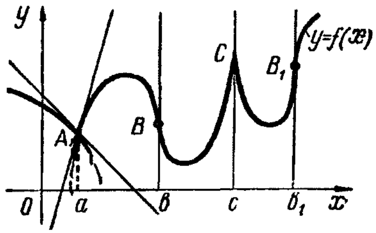
В соответствующей точке графика функции нет определенной касательной, но есть две различные односторонние касательные с угловыми коэффициентами:

$k_1 = y'_{(-)}$ и $k_2 = y'_{(+)}$ (угловая точка).

В точках b и b_1 при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является знакопостоянной бесконечно большой величиной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \text{ (или } +\infty).$$

В этом случае говорят, что функция имеет бесконечную производную. В соответствующих точках график функции имеет вертикальную касательную (точки перегиба с вертикальной касательной).



Черт. 29

В точке c односторонние производные являются бесконечно большими величинами разных знаков. В соответствующей точке график функции имеет две слившиеся вертикальные касательные (точка возврата с вертикальной касательной, частный случай угловой точки).

В точках a, b, b_1 и c функция $y = f(x)$ *непрерывна, но не дифференцируема.*

Для непосредственного нахождения производной y' от функции $y = f(x)$ служит следующее общее правило.

I. Придаем аргументу x произвольное приращение Δx и, подставляя в данное выражение функции вместо x наращенное значение $x + \Delta x$, находим наращенное значение функции

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

II. Вычитая из наращенного значения функции ее первоначальное значение, находим приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

III. Делим приращение функции на приращение аргумента, т. е. составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

IV. Ищем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Этот предел и даст искомую производную y' от функции $y=f(x)$.

124. Путем вычисления предела $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ найти производные следующих функций:

1) $y=3x^2-4x$; 2) $y=\frac{1}{x}$; 3) $y=\sqrt{x}$; 4) $y=\cos 3x$.

Решение: Руководствуясь указанным общим правилом для непосредственного нахождения производной, последовательно находим:

1) Для функции $y=3x^2-4x$:

I) $y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)=3x^2+6x\Delta x+$
$+3\Delta x^2-4x-4\Delta x$;

II) $\Delta y=(3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2-4x-4\Delta x)-(3x^2-4x)=$
$=6x\Delta x+3\Delta x^2-4\Delta x$;

III) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6x\Delta x+3\Delta x^2-4\Delta x}{\Delta x}=6x+3\Delta x-4$;

IV) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim(6x+3\Delta x-4)=6x-4$.

Следовательно, $\frac{dy}{dx}=\frac{d(3x^2-4x)}{dx}=6x-4$.

2) Для функции $y=\frac{1}{x}$:

I) $y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$;

II) $\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$;

III) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}$;

IV) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right]=-\frac{1}{x^2}$.

Следовательно, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

3) Для функции $y=\sqrt{x}$:

I) $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$;

II) $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$;

III) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$;

IV) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$
$=\lim\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) Для функции $y=\cos 3x$:

I) $y+\Delta y=\cos 3(x+\Delta x)$;

II) $\Delta y=\cos 3(x+\Delta x)-\cos 3x=$

$$=-2\sin\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\sin\frac{3}{2}\Delta x;$$

III) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2\sin\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x};$$

IV) $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-2\lim\sin\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\cdot\lim\frac{\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=-2\sin 3x\cdot\lim\frac{\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}=-2\sin 3x\cdot\frac{3}{2}=-3\sin 3x.\ *$$

125. Исходя из определения $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, найти производные следующих функций:

1) $y=x^2+5x-1$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $y=\sqrt{4x+1}$; 5) $y=\sin 3x$; 6)* $y=\mathrm{tg}\,2x$.

§ 2. Производные простейших алгебраических и тригонометрических функций

Понятие производной широко применяется для решения разнообразных задач, однако нет надобности каждый раз находить производную путем предельного перехода, посредством тех четырех операций, которые указаны в общем правиле дифференцирования функций.

Практически производные элементарных функций находятся по формулам дифференцирования, как это разъясняется в последующих задачах.

Простейшие формулы дифференцирования:

1) $(c)'=0$; 2) $(u+v-w)'=u'+v'-w'$;

3) $(uv)'=u'v+v'u$; 3а) $(cu)'=cu'$;

4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$; 4а) $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}$;

4б) $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$; 5) $(x^n)'=nx^{n-1}$;

6) $(\sin x)'=\cos x$; 7) $(\cos x)'=-\sin x$;

8) $(\mathrm{tg}\,x)'=\sec^2 x$; 9) $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\mathrm{cosec}^2 x$.

---

* Здесь при отыскании предела отношения двух бесконечно малых одна из них заменена другой, ей эквивалентной: $\sin\frac{3}{2}\Delta x\approx\frac{3}{2}\Delta x$. См. свойства эквивалентных бесконечно малых в гл. 1, § 8.