4) Для функции $y=\cos 3x$:

I) $y+\Delta y=\cos 3(x+\Delta x)$;

II) $\Delta y=\cos 3(x+\Delta x)-\cos 3x=$
$$=-2\sin\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\sin\frac{3}{2}\Delta x;$$

III) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{2\sin\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}$;

IV) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-2\lim\sin\left(3x+\dfrac{3}{2}\Delta x\right)\cdot\lim\dfrac{\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}=$
$$=-2\sin 3x\cdot\lim\frac{\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}=-2\sin 3x\cdot\frac{3}{2}=-3\sin 3x.\ *$$

125. Исходя из определения $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, найти производные следующих функций:

1) $y=x^2+5x-1$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $y=\sqrt{4x+1}$; 5) $y=\sin 3x$; 6)* $y=\operatorname{tg} 2x$.

§ 2. Производные простейших алгебраических и тригонометрических функций

Понятие производной широко применяется для решения разнообразных задач, однако нет надобности каждый раз находить производную путем предельного перехода, посредством тех четырех операций, которые указаны в общем правиле дифференцирования функций.

Практически производные элементарных функций находятся по формулам дифференцирования, как это разъясняется в последующих задачах.

Простейшие формулы дифференцирования:

1) $(c)'=0$; 2) $(u+v-w)'=u'+v'-w'$;

3) $(uv)'=u'v+v'u$; 3а) $(cu)'=cu'$;

4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$; 4а) $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}$;

4б) $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$; 5) $(x^n)'=nx^{n-1}$;

6) $(\sin x)'=\cos x$; 7) $(\cos x)'=-\sin x$;

8) $(\operatorname{tg} x)'=\sec^2 x$; 9) $(\operatorname{ctg} x)'=-\operatorname{cosec}^2 x$.

---

* Здесь при отыскании предела отношения двух бесконечно малых одна из них заменена другой, ей эквивалентной: $\sin\frac{3}{2}\Delta x\approx\frac{3}{2}\Delta x$. См. свойства эквивалентных бесконечно малых в гл. 1, § 8.

Здесь обозначено: c — постоянная; x — независимая переменная; u, v, w — функции от x.

126. Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1) $y=x^2-5x+4$; 2) $y=\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^3}$;

3) $z=x^5\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)$; 4) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$;

5) $\varphi(t)=\frac{10}{a\sin t-b\cos t}$; 6) $R(a)=\frac{\cos a\operatorname{ctg} a}{1+2\operatorname{tg} c}$.

Решение. 1) $y'=(x^2-5x+4)'=(x^2)'-(5x)'+(4)'$ (по формуле 2);

$$y'=2x-5\cdot 1+0=2x-5 \text{ (по формулам 5, 3а и 1).}$$

2) Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$y=x^{\frac{1}{2}}+5x^{-\frac{1}{3}}-x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}.$$

Применяя формулы 2, 5 и 3а, получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+5\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}-(-2)x^{-3}+\frac{1}{3}(-3)x^{-4}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}.$$

3) *1-й способ.* Пользуясь формулой 3, получим

$$z'=(x^5)'\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)+x^5\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)'=$$
$$=5x^4\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)+x^5\left(-\frac{1}{3}+6x\right)=10x^4-2x^5+21x^6.$$

2-й способ. Сначала раскроем скобки, затем дифференцируем, как сумму:

$$z=2x^5-\frac{1}{3}x^6+3x^7;\quad z'=10x^4-2x^5+21x^6.$$

Этот способ предпочтительнее, так как быстрее приводит к цели.

Следует иметь в виду, что вообще *не обязательно дифференцировать заданную функцию сразу. Можно предварительно подвергнуть ее тождественным преобразованиям* (если это целесообразно, т. е. ведет к упрощению дифференцирования).

4) Пользуясь формулой 4, получим

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2)'(x^2+1)-(x^2+1)'x^2}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

5) $$\varphi'(t)=\left(\frac{10}{a\sin t-b\cos t}\right)'=-\frac{10(a\sin t-b\cos t)'}{(a\sin t-b\cos t)^2}=$$

$$=-\frac{10(a\cos t+b\sin t)}{(a\sin t-b\cos t)^2}.$$

Здесь применена формула 4б (постоянный числитель), а не формула 4, что целесообразнее.

6) Пользуясь формулой 4а (постоянный знаменатель), получим

$$\frac{dR}{d\alpha}=\frac{(\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha)'}{1+2\operatorname{tg}c}=\frac{-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha(-\operatorname{cosec}^2\alpha)}{1+2\operatorname{tg}c}=$$

$$=-\frac{\cos\alpha(1+\operatorname{cosec}^2\alpha)}{1+2\operatorname{tg}c}.$$

127. Найти производную данной функции и затем вычислить ее частное значение при указанном значении аргумента:

1) $F(x)=\frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}$, $x=0{,}01$; 2) $z=\frac{\cos t}{1-\sin t}$, $t=\frac{\pi}{6}$;

3) $y=\frac{a+b}{3-2x}+\frac{5x^4-1}{a-b}$, $x=0$.

Решение. 1) Вначале раскрываем скобки и производим деление, затем дифференцируем:

$$F(x)=\frac{1-2\sqrt{x}+x}{x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+1=x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}+1;$$

$$F'(x)=-x^{-2}-2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Подставляя значение $x=0{,}01$, получим

$$F'(0{,}01)=-\frac{1}{0{,}01^2}+\frac{1}{\sqrt{0{,}01^3}}=-100^2+10^3=-9\,000.$$

2) По формуле 4 найдем

$$z'=\frac{(\cos t)'(1-\sin t)-\cos t\,(1-\sin t)'}{(1-\sin t)^2}=$$

$$=\frac{-\sin t\,(1-\sin t)-\cos t\,(-\cos t)}{(1-\sin t)^2}=\frac{-\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t}{(1-\sin t)^2}=\frac{1}{1-\sin t}.$$

Полагая $t=\frac{\pi}{6}$, получим $z'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{1-0{,}5}=2.$

3) Применяя формулы 4б и 4а, получим

$$y'=-\frac{(a+b)(3-2x)'}{(3-2x)^2}+\frac{(5x^4-1)'}{a-b}=\frac{2(a+b)}{(3-2x)^2}+\frac{20x^3}{a-b}.$$

При $x=0$ найдем $y'(0)=\frac{2}{9}(a+b)$.

По формулам дифференцирования найти производные следующих функций:

128. $y=x+3x^2-\frac{x^3}{3}$.

129. $y=x-2\sqrt{x}$.

130. $y=(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2$.

131. $s=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$.

132. $z=3\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x^3}+4$.

133. $u=\frac{2t}{t+3}$.

134. $v=\frac{x^2-3}{x^2+3}$.

135. $y=x^2\sin x$.

136. $r=\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

137. $y=-3\cos t\operatorname{ctg} t$.

138. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; вычислить $f'(1)$.

139. $F(t)=\frac{m}{t}+\frac{t}{m}$; вычислить $\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t=m}$.

140. $r(\varphi)=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$; вычислить $r'(\pi)$.

141. $z=(y^2-2y)\operatorname{tg} y$; вычислить $z'(0)$.

142. $u(r)=\frac{r^2}{2x^2}-\frac{2x^2}{r^2}$; вычислить $\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=x}$.

§ 3. Производная сложной функции

Если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, т. е. если y зависит от x через посредство промежуточного аргумента u, то y называется сложной функцией от x.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad y'=f'(u)\cdot u'(x).$$

Так, если $u=\varphi(x)$, то формулы 5, 6, 7, 8 и 9 предыдущего параграфа будут иметь следующий общий вид:

5) $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$;

6) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

7) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

8) $(\operatorname{tg} u)'=\sec^2 u\cdot u'$;

9) $(\operatorname{ctg} u)'=-\operatorname{cosec}^2 u\cdot u'$.

Полезно запомнить словесные выражения формул дифференцирования:

производная степени равна показателю, умноженному на то же основание с показателем на единицу меньше и на производную основания;