При $x=0$ найдем $y'(0)=\frac{2}{9}(a+b)$.

По формулам дифференцирования найти производные следующих функций:

128. $y=x+3x^2-\frac{x^3}{3}$.

129. $y=x-2\sqrt{x}$.

130. $y=(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2$.

131. $s=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$.

132. $z=3\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x^3}+4$.

133. $u=\frac{2t}{t+3}$.

134. $v=\frac{x^2-3}{x^2+3}$.

135. $y=x^2\sin x$.

136. $r=\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

137. $y=-3\cos t\operatorname{ctg} t$.

138. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; вычислить $f'(1)$.

139. $F(t)=\frac{m}{t}+\frac{t}{m}$; вычислить $\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t=m}$

140. $r(\varphi)=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$; вычислить $r'(\pi)$.

141. $z=(y^2-2y)\operatorname{tg} y$; вычислить $z'(0)$.

142. $u(r)=\frac{r^2}{2x^2}-\frac{2x^2}{r^2}$; вычислить $\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=x}$

§ 3. Производная сложной функции

Если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, т. е. если y зависит от x через посредство промежуточного аргумента u, то y называется сложной функцией от x.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad y'=f'(u)\cdot u'(x).$$

Так, если $u=\varphi(x)$, то формулы 5, 6, 7, 8 и 9 предыдущего параграфа будут иметь следующий общий вид:

5) $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$;

6) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

7) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

8) $(\operatorname{tg} u)'=\sec^2 u\cdot u'$;

9) $(\operatorname{ctg} u)'=-\operatorname{cosec}^2 u\cdot u'$.

Полезно запомнить словесные выражения формул дифференцирования:

производная степени равна показателю, умноженному на то же основание с показателем на единицу меньше и на производную основания;

производная синуса равна косинусу того же аргумента, умноженному на производную от аргумента.

Выразить словесно остальные формулы дифференцирования рекомендуется студенту самостоятельно.

Найти производные следующих функций:

143. 1) $y=(1+5x)^3$; 2) $y=\sin 5x$; 3) $y=\cos^2 x$;

4) $y=\sin x^2$; 5) $y=\sqrt[3]{2+x^4}$.

Решение. 1) Полагая $y=u^3$, где $u=1+5x$, и применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{dy}{du}=3u^2;\quad \frac{du}{dx}=5;\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\cdot 5=15(1+5x)^2.$$

Легко проверить правильность этого результата: возведя в куб и дифференцируя полученный многочлен, приходим к тому же ответу.

2) Полагая $5x=u$ и пользуясь формулами 6 и 3а, найдем

$$y'=(\sin 5x)'=(\sin u)'=\cos u\cdot u'=5\cos 5x.$$

3) Полагая $\cos x=u$ и применяя формулы 5 и 7, получим

$$y'=(\cos^2 x)'=(u^2)'=2u\cdot u'=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x.$$

4) При $x^2=u$ по формулам 6 и 5 найдем

$$(\sin x^2)'=(\sin u)'=\cos u\cdot u'=2x\cos x^2.$$

5) Полагаем $2+x^4=u$, и, пользуясь формулой 5, имеем

$$(\sqrt[3]{2+x^4})'=(\sqrt[3]{u})'=\left(u^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}u'=$$

$$=\frac{1}{3}(2+x^4)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4x^3=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(2+x^4)^2}}.$$

Дифференцирование этой сложной функции можно записать иначе:

$$(\sqrt[3]{2+x^4})'=\left[(2+x^4)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}(2+x^4)^{-\frac{2}{3}}(2+x^4)'=\frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(2+x^4)^2}}.$$

Второй способ записи без особого обозначения промежуточного аргумента значительно проще. Этому способу записи и следует научиться при дифференцировании сложных функций.

144. 1) $z=(3ax-x^2)^k$; z'? 2) $\beta=2\sqrt{\sin\frac{\alpha}{3}}$; $\frac{d\beta}{d\alpha}$?

3) $s=\left(\frac{t}{2t+1}\right)^{10}$, вычислить $s'(-1)$.

4) $r=\sin^3 2\varphi-\cos^3 2\varphi$, вычислить $r'\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Решение. 1) Применяя формулы 5 и 2, найдем

$$z' = k(3ax - x^2)^{k-1} \cdot (3ax - x^2)' = k(3a - 2x)(3ax - x^2)^{k-1}.$$

2) Используем формулы 5 и 6:

$$\beta' = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sin\frac{\alpha}{3}\right)' = \left(\sin\frac{\alpha}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos\frac{\alpha}{3} \cdot \left(\frac{\alpha}{3}\right)' =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{3}}{3\sqrt{\sin\frac{\alpha}{3}}}.$$

3) Применяем формулы 5 и 4:

$$s' = 10\left(\frac{t}{2t+1}\right)^9 \cdot \frac{1 \cdot (2t+1) - 2 \cdot t}{(2t+1)^2} = \frac{10t^9}{(2t+1)^{11}}.$$

При $t = -1$ получим $s'(-1) = 10$.

4) Сначала запишем данную функцию в виде

$$r = (\sin 2\varphi)^3 - (\cos 2\varphi)^3,$$

что всегда полезно при дифференцировании степеней тригонометрических функций.

Пользуясь формулами 2, 5, 6 и 7, получим

$$r' = 3(\sin 2\varphi)^2 (\sin 2\varphi)' - 3(\cos 2\varphi)^2 (\cos 2\varphi)' =$$
$$= 3\sin^2 2\varphi \cdot 2\cos 2\varphi - 3\cos^2 2\varphi \cdot (-2\sin 2\varphi) =$$
$$= 3\sin 4\varphi(\sin 2\varphi + \cos 2\varphi).$$

При $\varphi = \frac{\pi}{8}$ найдем $r'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}.$

Найти производные следующих функций:

145. $y = (2 + 3x)^5$.

146. $y = \sin(2x - 1)$.

147. $y = \operatorname{ctg}\sqrt{x}.$

148. $z = \sqrt{x + \sqrt{x}}.$

149. $u = \sin at \cos\frac{t}{a}$.

150. $r = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

151. $v = \frac{1}{(1 + \sin 4y)^3}$.

152. $s = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 z - \operatorname{tg} z + z.$

153. $y = \frac{\sin x}{2\cos^2 x}$.

154. $r = \frac{\operatorname{tg} a\varphi - b}{\sec a\varphi}$.

155. $y = \sin^2 x + \sin x^2$; вычислить $y'(0)$.

156. $y = \cos\frac{x}{a} + \cos\frac{a}{x}$; вычислить $y'(a)$.

157*. $z = \sqrt[4]{1 + \cos x^4}$; вычислить $z'\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}\right)$.