§ 4. Производные показательных и логарифмических функций

Общие формулы и их частные виды:

10) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$; 11) $(\log u)' = \frac{u'}{u} \log e$;

10а) $(e^u)' = e^u u'$; 11а) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;

10б) $(a^x)' = a^x \ln a$; 11б) $(\log x)' = \frac{1}{x} \log e$;

10в) $(e^x)' = e^x$; 11в) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Для дифференцирования логарифмической функции с основанием $a \neq e$ можно предварительно преобразовать ее в логарифмическую функцию с основанием e по формуле

$$\log_a u = \log_a e \cdot \ln u.$$

158. Найти производные следующих функций:

1) $y = x^3 3^x$. 2) $f(x) = \sqrt[x]{3} + \frac{1}{2^{5x}} + 6^{\sqrt{x}}$; вычислить $f'(1)$.

3) $y = \ln \cos 3x$. 4) $r = a^{\varphi} b^{\varphi} c^{\varphi} + \lg(5\varphi) - 4 \lg \sqrt{\varphi}$.

5) $y = \ln \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$. 6) $y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}}$; вычислить $y'(0)$.

Решение. 1) Дифференцируем как произведение и по формулам 5 и 10б:

$$y' = (x^3)' 3^x + x^3 (3^x)' = 3x^2 3^x + x^3 3^x \ln 3 = x^2 3^x (3 + x \ln 3).$$

2) Вводим дробные и отрицательные показатели, затем дифференцируем как сумму и по формуле 10:

$$f'(x) = \left(3^{\frac{1}{x}} + 2^{-5x} + 6^{x^{\frac{1}{2}}}\right)' = 3^{\frac{1}{x}} \ln 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' +$$

$$+ 2^{-5x} \ln 2 \cdot (-5x)' + 6^{x^{\frac{1}{2}}} \ln 6 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} 3^{\frac{1}{x}} \ln 3 - 5 \cdot 2^{-5x} \ln 2 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} 6^{x^{\frac{1}{2}}} \ln 6.$$

Полагая $x = 1$, найдем $f'(1) = -3 \ln 3 - \frac{5 \ln 2}{32} + 3 \ln 6 = \frac{91}{32} \ln 2$.

3) Согласно формулам 11а и 7а имеем

$$y' = (\ln \cos 3x)' = \frac{(\cos 3x)'}{\cos 3x} = \frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x} = -3 \operatorname{tg} 3x.$$

4) Здесь предварительно тождественно преобразуем данную функцию:

$$r = (abc)^{\varphi} + \lg 5 + \lg \varphi - 4 \cdot \frac{1}{2} \lg \varphi = (abc)^{\varphi} + \lg 5 - \lg e \cdot \ln \varphi.$$

Затем дифференцируем по формулам 10б и 11б:

$$\frac{dr}{d\varphi}=(abc)^{\varphi}\ln(abc)-\frac{\lg e}{\varphi}.$$

5) Чтобы упростить дифференцирование, сначала преобразуем логарифм дроби в разность логарифмов числителя и знаменателя:

$$y=\ln\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=\ln(a^2-x^2)-\ln(a^2+x^2).$$

Согласно формуле 11а найдем

$$y'=\frac{(a^2-x^2)'}{a^2-x^2}-\frac{(a^2+x^2)'}{a^2+x^2}=\frac{-2x}{a^2-x^2}-\frac{2x}{a^2+x^2}=\frac{4a^2x}{x^4-a^4}.$$

6) $y=\ln\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}=\frac{1}{2}[\ln e^{3x}-\ln(1+e^{3x})]=\frac{1}{2}[3x-\ln(1+e^{3x})];$

$$y'=\frac{1}{2}\left(3-\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=\frac{3}{2(1+e^{3x})};\quad y'(0)=\frac{3}{4}.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, на основании свойств логарифмов данная логарифмическая функция преобразована сначала к более удобному для дифференцирования виду.

Вообще, *если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, поддающееся логарифмированию* (произведение, частное, степень, корень), *то полезно сначала выполнить логарифмирование.*

Найти производные следующих функций:

159. $y=2^x+2^{3x}$.

160. $y=a^{x^2}-e^{-x^2}$.

161. $z=3\sqrt{x}e^{-x}$

162. $x=e^{\alpha\varphi}\sin b\varphi$.

163. $s=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

164. $y=\ln(ax^2+bx+c)$.

165. $y=\cos^2 x-2\ln\cos x$.

166. $z=x(1-\ln x)$.

167. $u=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$.

168. $v=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

169. $r=\ln\frac{2e^{\varphi}}{e^{\varphi}+1}$; вычислить $r'(0)$.

§ 5. Производные обратных тригонометрических функций

Общие формулы и их частные виды:

12) $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 12а) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 13а) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2}$; 14а) $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$;

15) $(\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2}$; 15а) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.