Затем дифференцируем по формулам 10б и 11б:

$$\frac{dr}{d\varphi}=(abc)^{\varphi}\ln(abc)-\frac{\lg e}{\varphi}.$$

5) Чтобы упростить дифференцирование, сначала преобразуем логарифм дроби в разность логарифмов числителя и знаменателя:

$$y=\ln\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=\ln(a^2-x^2)-\ln(a^2+x^2).$$

Согласно формуле 11а найдем

$$y'=\frac{(a^2-x^2)'}{a^2-x^2}-\frac{(a^2+x^2)'}{a^2+x^2}=\frac{-2x}{a^2-x^2}-\frac{2x}{a^2+x^2}=\frac{4a^2x}{x^4-a^4}.$$

6) $y=\ln\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}=\frac{1}{2}[\ln e^{3x}-\ln(1+e^{3x})]=\frac{1}{2}[3x-\ln(1+e^{3x})];$

$$y'=\frac{1}{2}\left(3-\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=\frac{3}{2(1+e^{3x})};\quad y'(0)=\frac{3}{4}.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, на основании свойств логарифмов данная логарифмическая функция преобразована сначала к более удобному для дифференцирования виду.

Вообще, *если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, поддающееся логарифмированию* (произведение, частное, степень, корень), *то полезно сначала выполнить логарифмирование.*

Найти производные следующих функций:

159. $y=2^x+2^{3x}$.

160. $y=a^{x^2}-e^{-x^2}$.

161. $z=3\sqrt{x}e^{-x}$

162. $x=e^{\alpha\varphi}\sin b\varphi$.

163. $s=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

164. $y=\ln(ax^2+bx+c)$.

165. $y=\cos^2 x-2\ln\cos x$.

166. $z=x(1-\ln x)$.

167. $u=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$.

168. $v=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

169. $r=\ln\frac{2e^{\varphi}}{e^{\varphi}+1}$; вычислить $r'(0)$.

§ 5. Производные обратных тригонометрических функций

Общие формулы и их частные виды:

12) $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

12а) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

13а) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2}$;

14а) $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$;

15) $(\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2}$;

15а) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

170. Найти производные следующих функций:

1) $y=5\arcsin kx+3\arccos kx$; 2) $y=\arcsin\frac{a}{x}-\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$;

3) $r=\operatorname{arctg}\frac{m}{\varphi}+\operatorname{arcctg}(m\operatorname{ctg}\varphi)$; $r'(0)$?, $r'(\pi)$?

Решение. 1) По формулам 12 и 13 найдем

$$y'=5\frac{(kx)'}{\sqrt{1-(kx)^2}}+3\left[-\frac{(kx)'}{\sqrt{1-(kx)^2}}\right]=\frac{5k}{\sqrt{1-k^2x^2}}-$$
$$-\frac{3k}{\sqrt{1-k^2x^2}}=\frac{2k}{\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

2) Используя формулы 12 и 15, имеем

$$y'=\frac{\left(\frac{a}{x}\right)'}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}-\left[-\frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{1+\frac{x^2}{a^2}}\right]=$$
$$=\frac{-\frac{a}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}}}+\frac{\frac{1}{a}}{\frac{a^2+x^2}{a^2}}=\frac{a}{a^2+x^2}-\frac{a}{|x|\sqrt{x^2-a^2}},$$

так как $\sqrt{x^2}$ равен не x, а $|x|$ и $x\neq 0$.

3) Применяем формулы 14 и 15:

$$r'=\frac{\left(\frac{m}{\varphi}\right)'}{1+\frac{m^2}{\varphi^2}}-\frac{(m\operatorname{ctg}\varphi)'}{1+m^2\operatorname{ctg}^2\varphi}=\frac{-\frac{m}{\varphi^2}}{\frac{\varphi^2+m^2}{\varphi^2}}-\frac{-m\operatorname{cosec}^2\varphi}{1+m^2\operatorname{ctg}^2\varphi}=$$
$$=-\frac{m}{\varphi^2+m^2}+\frac{m}{\sin^2\varphi+m^2\cos^2\varphi}.$$

Подставляя вместо φ заданные значения 0 и π, найдем

$$r'(0)=-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=0;\quad r'(\pi)=-\frac{m}{\pi^2+m^2}+\frac{1}{m}=\frac{\pi^2}{m(\pi^2+m^2)}.$$

Найти производные следующих функций:

171. $y=\arcsin\sqrt{x}$.

172. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

173. $z=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$.

174. $r=\arccos\frac{1}{\varphi^2}$.

175. $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

176. $v=\arccos\frac{1}{2x}$.

177. $x=\varphi\operatorname{arctg}\varphi-\ln\sqrt{1+\varphi^2}$; вычислить $x'(-1)$.

178. $y=x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; вычислить $y'(0)$.

179. $Q=\operatorname{arctg}\frac{a+z}{1-az}$; вычислить $Q'(0)$ и $Q'(-1)$.