§ 6. Смешанные задачи на дифференцирование

Найти производные следующих функций:

180. 1) $y=\frac{e^{ax}}{1+a^2}(a\sin x-\cos x)$; 2) $r=\ln\sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}}$;

3) $s=x^2(1+m\sqrt[x]{e})$; показать, что эта функция удовлетворяет уравнению $x^2(s'-1)=(2x-1)s$.

Решение. 1) Последовательно применяя формулы 3, 10, 2, 6 и 7, получим

$$y'=\frac{1}{1+a^2}[(e^{ax})'(a\sin x-\cos x)+e^{ax}(a\sin x-\cos x)']=$$
$$=\frac{1}{1+a^2}[ae^{ax}(a\sin x-\cos x)+e^{ax}(a\cos x+\sin x)]=$$
$$=\frac{e^{ax}}{1+a^2}(a^2\sin x+\sin x)=e^{ax}\sin x.$$

2) Вначале преобразуем данную функцию согласно свойствам логарифмов, затем дифференцируем по формулам 8 и 11:

$$r=\frac{1}{4}[\ln(1+\operatorname{tg}\varphi)-\ln(1-\operatorname{tg}\varphi)];$$
$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{1}{4}\left[\frac{(1+\operatorname{tg}\varphi)'}{1+\operatorname{tg}\varphi}-\frac{(1-\operatorname{tg}\varphi)'}{1-\operatorname{tg}\varphi}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{\sec^2\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}-\frac{-\sec^2\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}\right)=$$
$$=\frac{\sec^2\varphi\,(1-\operatorname{tg}\varphi+1+\operatorname{tg}\varphi)}{4(1-\operatorname{tg}^2\varphi)}=\frac{1}{2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}=\frac{1}{2}\sec 2\varphi.$$

3) Заменим радикал дробным показателем и дифференцируем по формулам 3, 5 и 10:

$$s=x^2\left(1+me^{\frac{1}{x}}\right);\quad s'=2x\left(1+me^{\frac{1}{x}}\right)+$$
$$+x^2me^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x+me^{\frac{1}{x}}(2x-1).$$

Подставив s и s' в данное уравнение, получим тождество

$$x^2\left[2x+me^{\frac{1}{x}}(2x-1)-1\right]=(2x-1)x^2\left(1+me^{\frac{1}{x}}\right);\ 0=0.$$

181. 1) $y=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; y'? 2) $y=\arcsin(\cos x)$; y'?

3) $r=\varphi^2\arccos\frac{2}{\varphi}-2\sqrt{\varphi^2-4}$; вычислить $r'(2)$ и $r'(-2)$.

4)* $y=|1-x^2|$; найти $y'\left(\frac{1}{2}\right)$, $y'(-2)$ и точки, где функция не дифференцируема.

Решение. 1) Последовательно применяя формулы 2, 4, 7, 5, 6, 11 и 14, получим

$$y' = -\frac{(\cos x)' \sin^2 x - \cos x (\sin^2 x)'}{\sin^4 x} + \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x}{\sin^4 x} + \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} +$$

$$+ \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{2}{\sin^3 x}.$$

2) Пользуясь формулами 12 и 7, найдем

$$y' = \frac{(\cos x)'}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = -\frac{\sin x}{|\sin x|}.$$

Смысл этого результата таков: в точках x, где $\sin x > 0$, $y' = -1$; в точках, где $\sin x < 0$, $y' = 1$; в точках, где $\sin x = 0$, т. е. $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, данная функция не дифференцируема (черт. 30).

3) Заменив радикал дробным показателем и применяя формулы 2, 3, 5, 13 и 4, имеем

$$r' = (\varphi^2)' \arccos\frac{2}{\varphi} + \varphi^2\left(\arccos\frac{2}{\varphi}\right)' - 2\left[(\varphi^2-4)^{\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= 2\varphi\arccos\frac{2}{\varphi} - \varphi^2\frac{-\frac{2}{\varphi^2}}{\sqrt{1-\frac{4}{\varphi^2}}} - 2\cdot\frac{1}{2}(\varphi^2-4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\varphi =$$

$$= 2\left(\varphi\arccos\frac{2}{\varphi} + \frac{|\varphi|}{\sqrt{\varphi^2-4}} - \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2-4}}\right), \text{ так как } \sqrt{\varphi^2} = |\varphi|.$$

При $\varphi > 0$: $r' = 2\varphi\arccos\frac{2}{\varphi}$; $r'(2) = 4\arccos 1 = 0$.

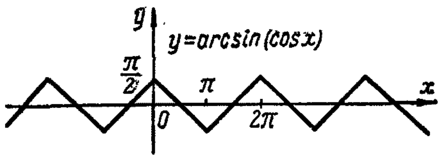
При $\varphi < 0$: $r' = 2\left(\varphi\arccos\frac{2}{\varphi} - \frac{2\varphi}{\sqrt{\varphi^2-4}}\right)$; $r'(-2) = +\infty$.

4)* а) При $1 - x^2 > 0$, т. е. в интервале $-1 < x < 1$, $y' = (1-x^2)' = -2x$, поэтому $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$;

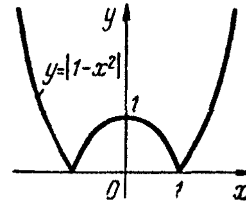
б) при $1 - x^2 < 0$, т. е. в интервалах $-\infty < x < -1$, и $1 < x < +\infty$, $y' = -(1-x^2)' = 2x$, поэтому $y'(-2) = -4$;

в) при $1 - x^2 = 0$, т. е. в точках $x = \pm 1$, данная непрерывная функция не дифференцируема; в этих точках производная y' не существует, но существуют две различные (по знаку) левая и правая производные: $y'_{(-)} = -2$ и $y'_{(+)} = 2$.

В соответствующих точках график функции (черт. 31) имеет по две различных односторонних касательных с угловыми коэффициентами $k_1 = -2$ и $k_2 = 2$ (угловые точки).



Черт. 30



Черт. 31

Найти производные следующих функций:

182. $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$.

183. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

184. $y = \dfrac{1}{(1-x^2)^3}$.

185. $x = \sqrt{\cos 4\alpha}$.

186. $s = \sin^4 t + \cos^4 t$.

187. $r = \varphi \sec^2 a\varphi$.

188. $x = 2e^t \sin t \cos^2 t$.

189. $y = x^4 (8 \ln^2 x - 4 \ln x + 1)$.

190. $u = e^{2v} \ln \operatorname{tg} \dfrac{v}{2}$.

191. $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$.

192. $x = \ln \dfrac{t}{\sqrt{t^4 - 1}}$.

193. $u = \ln \sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$.

194. $x = t(\cos \ln t - \sin \ln t)$.

195. $y = \dfrac{5^{2x}}{2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}}$.

196. $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$.

197. $y = \arccos(\cos x)$.

198. $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}}$; вычислить $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

199. $u = x\sqrt{4 - x^2} + 4 \arcsin \dfrac{x}{2}$; вычислить $u'(2) + u'(0)$.

200*. $y = ae^{-\sin x} + \sin x - 1$; показать, что $y' + y \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$.

201*. $y = 2|\cos x| + \cos x$; найти $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $y'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ и угловые точки графика функции.

202*. $y = |x| e^x$; вычислить $y'(-1)$, $y'(1)$ и односторонние производные для угловой точки графика функции.

§ 7. Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать.

Если требуется найти y' из уравнения $y = f(x)$, то можно:
а) логарифмировать обе части уравнения (по основанию e)

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x);$$