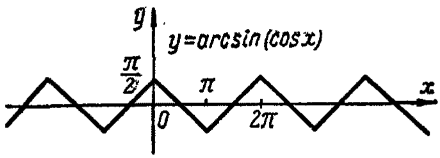
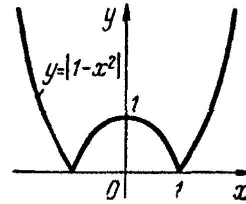
В соответствующих точках график функции (черт. 31) имеет по две различных односторонних касательных с угловыми коэффициентами $k_1=-2$ и $k_2=2$ (угловые точки).



Черт. 30



Черт. 31

Найти производные следующих функций:

182. $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$.

183. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

184. $y=\dfrac{1}{(1-x^2)^3}$.

185. $x=\sqrt{\cos 4\alpha}$.

186. $s=\sin^4 t+\cos^4 t$.

187. $r=\varphi \sec^2 a\varphi$.

188. $x=2e^t \sin t \cos^2 t$.

189. $y=x^4(8\ln^2 x-4\ln x+1)$.

190. $u=e^{2v}\ln \operatorname{tg}\dfrac{v}{2}$.

191. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a})$.

192. $x=\ln\dfrac{t}{\sqrt{t^4-1}}$.

193. $u=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$.

194. $x=t(\cos\ln t-\sin\ln t)$.

195. $y=\dfrac{5^{2x}}{2+\sqrt{4+5^{2x}}}$.

196. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$.

197. $y=\arccos(\cos x)$.

198. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}}$; вычислить $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

199. $u=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\dfrac{x}{2}$; вычислить $u'(2)+u'(0)$.

200*. $y=ae^{-\sin x}+\sin x-1$; показать, что $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

201*. $y=2|\cos x|+\cos x$; найти $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $y'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ и угловые точки графика функции.

202*. $y=|x|e^x$; вычислить $y'(-1)$, $y'(1)$ и односторонние производные для угловой точки графика функции.

§ 7. Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать.

Если требуется найти y' из уравнения $y=f(x)$, то можно:

а) логарифмировать обе части уравнения (по основанию e)

$$\ln y=\ln f(x)=\varphi(x);$$

б) дифференцировать обе части полученного равенства, где $\ln y$ есть сложная функция от x,

$$\frac{y'}{y}=\varphi'(x) \text{ (согласно формуле 11);}$$

в) заменить y его выражением через x и определить y':

$$y'=y\varphi'(x)=f(x)\,\varphi'(x).$$

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) и, в частности, для нахождения производной от показательно-степенной функции $y=u^v$, где u и v — функции от x.

203. Найти производные следующих функций:

1) $y=x^x$; 2) $r=(\cos\alpha)^{\sin 2\alpha}$;

3) $s=\dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$; 4) $R=(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$.

Решение. Применяя логарифмическое дифференцирование, последовательно находим:

1) а) $\ln y=x\ln x$;

б) $\dfrac{y'}{y}=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$;

в) $y'=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)$.

2) а) $\ln r=\sin 2\alpha\ln\cos\alpha$;

б) $\dfrac{r'}{r}=(\sin 2\alpha)'\ln\cos\alpha+\sin 2\alpha(\ln\cos\alpha)'=2\cos 2\alpha\ln\cos\alpha+$

$$+\sin 2\alpha\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=2\cos 2\alpha\ln\cos\alpha-2\sin^2\alpha;$$

в) $r'=2(\cos 2\alpha\ln\cos\alpha-\sin^2\alpha)(\cos\alpha)^{\sin 2\alpha}$.

3) а) $\ln s=\ln 2+\ln t-\dfrac{1}{2}\ln(1-t^2)$;

б) $\dfrac{s'}{s}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2t}{1-t^2}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{t}{1-t^2}=\dfrac{1}{t(1-t^2)}$;

в) $s'=\dfrac{s}{t(1-t^2)}=\dfrac{2t}{t(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$.

4) а) $\ln R=\ln(x-1)+\dfrac{2}{3}\ln(x+1)+\dfrac{1}{3}\ln(x-2)$;

б) $\dfrac{R'}{R}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{3(x+1)}+\dfrac{1}{3(x-2)}=\dfrac{2x^2-3x-1}{(x^2-1)(x-2)}$;

в) $R'=\dfrac{2x^2-3x-1}{(x^2-1)(x-2)}(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}=\dfrac{2x^2-3x-1}{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}}$.

Найти производные следующих функций:

204. $y=\left(\frac{x}{a}\right)^{ax}$.

205. $y=\sqrt[x]{x}$.

206. $r=(\sin\varphi)^{\varphi}$.

207. $y=\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$.

208. $u=\frac{(1+t)^2}{(2+t)^3(3+t)^4}$.

209. $y=\sqrt[3]{\frac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}$.

210. $s=\varphi^{e^{\varphi}}$.

211*. $v=x^{x^x}$.

§ 8. Производные высших порядков

Если y' есть производная от функции $y=f(x)$, то производная от y' называется второй производной, или производной второго порядка от первоначальной функции y, и обозначается y'', или $f''(x)$, или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично определяются и обозначаются производные любого порядка:

производная третьего порядка $(y'')'=y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$;

производная четвертого порядка $(y''')'=y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\frac{d^4y}{dx^4}$;

производная n-го порядка $(y^{(n-1)})'=y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка от данной функции приходится последовательно находить все ее производные низших порядков.

Для произведения двух функций можно получить производную любого n-го порядка, пользуясь формулой Лейбница:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)}.$$

212. Для данных функций найти производные указанного порядка:

1) $y=x^5-7x^3+2$; y'''? 2) $y=\ln x$; $y^{(5)}$? 3) $s=\operatorname{arctg}2x$; $s''(-1)$? 4) $y=e^{-\varphi}\sin\varphi$; показать, что функция удовлетворяет уравнению $y''+2y'+2y=0$. 5) $y=e^x(x^2-1)$; $y^{(24)}$? 6) $y=x^m$; $y^{(k)}$?

Решение. 1) Дифференцируя функцию y, получим

$$(y)'=y'=5x^4-21x^2.$$

Дифференцируя производную y', получим

$$(y')'=y''=20x^3-42x.$$