Найти производные следующих функций:

204. $y=\left(\frac{x}{a}\right)^{ax}$.

205. $y=\sqrt[x]{x}$.

206. $r=(\sin\varphi)^{\varphi}$.

207. $y=\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$.

208. $u=\frac{(1+t)^2}{(2+t)^3(3+t)^4}$.

209. $y=\sqrt[3]{\frac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}$.

210. $s=\varphi^{e^{\varphi}}$.

211*. $v=x^{x^x}$.

§ 8. Производные высших порядков

Если y' есть производная от функции $y=f(x)$, то производная от y' называется второй производной, или производной второго порядка от первоначальной функции y, и обозначается y'', или $f''(x)$, или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично определяются и обозначаются производные любого порядка:

производная третьего порядка $(y'')'=y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$;

производная четвертого порядка $(y''')'=y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\frac{d^4y}{dx^4}$;

производная n-го порядка $(y^{(n-1)})'=y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка от данной функции приходится последовательно находить все ее производные низших порядков.

Для произведения двух функций можно получить производную любого n-го порядка, пользуясь формулой Лейбница:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)}.$$

212. Для данных функций найти производные указанного порядка:

1) $y=x^5-7x^3+2$; y'''? 2) $y=\ln x$; $y^{(5)}$? 3) $s=\operatorname{arctg}2x$; $s''(-1)$? 4) $y=e^{-\varphi}\sin\varphi$; показать, что функция удовлетворяет уравнению $y''+2y'+2y=0$. 5) $y=e^x(x^2-1)$; $y^{(24)}$? 6) $y=x^m$; $y^{(k)}$?

Решение. 1) Дифференцируя функцию y, получим

$$(y)'=y'=5x^4-21x^2.$$

Дифференцируя производную y', получим

$$(y')'=y''=20x^3-42x.$$

Дифференцируя вторую производную y'', получим

$$(y'')' = y''' = 60x^2 - 42.$$

$$2)\ y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Для нахождения следующих производных здесь полезно ввести отрицательный показатель степени:

$$y'' = -x^{-2};\ y''' = 2x^{-3};\ y^{(4)} = -6x^{-4};\ y^{(5)} = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}.$$

$$3)\ s' = (\operatorname{arctg} 2x)' = \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2};$$

$$s'' = -\frac{2(1+4x^2)'}{(1+4x^2)^2} = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2}.$$

При $x = -1$ найдем $s''(-1) = \frac{16}{25}$.

4) Найдем y' и y'':

$$y' = (e^{-\varphi})' \sin\varphi + e^{-\varphi}(\sin\varphi)' = -e^{-\varphi}\sin\varphi + e^{-\varphi}\cos\varphi = $$
$$= e^{-\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi);$$

$$y'' = -e^{-\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) + e^{-\varphi}(-\sin\varphi - \cos\varphi) = -2e^{-\varphi}\cos\varphi.$$

Подставляя y, y' и y'' в данное уравнение, получим тождество:

$$-2e^{-\varphi}\cos\varphi + 2e^{-\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) + 2e^{-\varphi}\sin\varphi = 0;\quad 0 = 0.$$

5) Применяя формулу Лейбница, получим

$$y^{(24)} = [e^x(x^2-1)]^{(24)} = (e^x)^{(24)}(x^2-1) + 24(e^x)^{(23)}(x^2-1)' +$$
$$+ \frac{24\cdot 23}{2}(e^x)^{(22)}(x^2-1)''.$$

Все следующие слагаемые равны нулю, ибо все высшие производные от функции x^2-1, начиная с третьей, тождественно равны нулю;

$$y^{(24)} = e^x(x^2-1) + 24e^x\cdot 2x + 12\cdot 23e^x\cdot 2 = e^x(x^2+48x+551)$$

(так как производная любого порядка от e^x есть e^x).

6) Дифференцируя k раз, получим:

$$y = x^m;\ y' = mx^{m-1};\ y'' = m(m-1)x^{m-2};\ \ldots;$$
$$y^{(k)} = m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)x^{m-k}.$$

В частности, если m — целое положительное число, то

$$y^{(m)} = m! \text{ и } y^{(m+1)} = y^{(m+2)} = \ \ldots\ = 0.$$

213. $z = t^2 + \sin 5t$; z'''? **214.** $v = \alpha^5 \ln\alpha$; v'''?

215. $x = (2p-1)^5$; $x^{(4)}(3)$? **216.** $y = x^2e^{3x}$; y''?

217. $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + e^x$; показать, что функция удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

218. $y=a^{2x}$; $y^{(n)}$?   219. $y=(1+x)^m$; $\frac{d^k y}{dx^k}$?

220. $y=x\sin x$; $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$? 221*. $y=x^{n-1}\ln x$; $y^{(n)}(1)$?

§ 9. Производные неявной функции

Если y есть неявная функция от x, т. е. задана уравнением $f(x, y)=0$, не разрешенным относительно y, то для нахождения производной $\frac{dy}{dx}$ нужно продифференцировать по x обе части равенства, помня, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное равенство относительно искомой производной. Как правило, она будет зависеть от x и y; $\frac{dy}{dx}=\varphi(x, y)$.

Вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ от неявной функции получим, дифференцируя функцию $\varphi(x, y)$ по переменной x и помня при этом, что y есть функция от x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\varphi(x, y)}{dx}=F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Заменяя здесь $\frac{dy}{dx}$ через $\varphi(x, y)$, получим выражение второй производной через x и y:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F[x, y, \varphi(x, y)]=\psi(x, y).$$

Совершенно так же и все высшие производные от неявной функции можно выразить только через x и y: каждый раз, когда при дифференцировании появляется производная $\frac{dy}{dx}$, ее следует заменять через $\varphi(x, y)$.

К тому же результату приводит последовательное дифференцирование равенства $f(x, y)=0$ с последующим исключением из полученной системы всех производных низшего порядка.

Для данных неявных функций найти производные указанного порядка.

222. 1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{dy}{dx}$? 2) $e^{\varphi-2}+r\varphi-3r-2=0$; $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}$?

3) $x^y=y^x$; $\frac{dx}{dy}$?   4) $x^2+y^2-4x-10y+4=0$; $y'_{x=6}$?

Каков геометрический смысл решения этой задачи?

5) $t-s+\operatorname{arc\,tg} s=0$; s''? $y=x+\ln y$; y''?; x''?