218. $y=a^{2x}$; $y^{(n)}$? 219. $y=(1+x)^m$; $\frac{d^k y}{dx^k}$?

220. $y=x\sin x$; $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$? 221*. $y=x^{n-1}\ln x$; $y^{(n)}(1)$?

§ 9. Производные неявной функции

Если y есть неявная функция от x, т. е. задана уравнением $f(x, y)=0$, не разрешенным относительно y, то для нахождения производной $\frac{dy}{dx}$ нужно продифференцировать по x обе части равенства, помня, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное равенство относительно искомой производной. Как правило, она будет зависеть от x и y; $\frac{dy}{dx}=\varphi(x, y)$.

Вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ от неявной функции получим, дифференцируя функцию $\varphi(x, y)$ по переменной x и помня при этом, что y есть функция от x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\varphi(x, y)}{dx}=F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Заменяя здесь $\frac{dy}{dx}$ через $\varphi(x, y)$, получим выражение второй производной через x и y:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F[x, y, \varphi(x, y)]=\psi(x, y).$$

Совершенно так же и все высшие производные от неявной функции можно выразить только через x и y: каждый раз, когда при дифференцировании появляется производная $\frac{dy}{dx}$, ее следует заменять через $\varphi(x, y)$.

К тому же результату приводит последовательное дифференцирование равенства $f(x, y)=0$ с последующим исключением из полученной системы всех производных низшего порядка.

Для данных неявных функций найти производные указанного порядка.

222. 1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{dy}{dx}$? 2) $e^{\varphi-2}+r\varphi-3r-2=0$; $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}$?

3) $x^y=y^x$; $\frac{dx}{dy}$? 4) $x^2+y^2-4x-10y+4=0$; $y'_{x=6}$?

Каков геометрический смысл решения этой задачи?

5) $t-s+\operatorname{arc\,tg} s=0$; s''? $y=x+\ln y$; y''?; x''?

Решение. 1) Дифференцируем по x обе части равенства, где y есть функция от x, получим

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0. \text{ Отсюда найдем } y'=\frac{b^2x}{a^2y}.$$

2) Дифференцируя по φ и считая r функцией φ, найдем

$$e^{\varphi-2}+\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r-3\frac{dr}{d\varphi}=0.$$

Из этого равенства определяем $\frac{dr}{d\varphi}=\frac{e^{\varphi-2}+r}{3-\varphi}$.

Подставляя данное по условию значение $\varphi=2$ в исходное уравнение, найдем соответствующее значение $r_{\varphi=2}=-1$.

Искомое частное значение производной $\frac{dr}{d\varphi}$ при $\varphi=2$ будет

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}=\frac{e^0-1}{3-2}=0.$$

3) Логарифмируем обе части данного уравнения (по основанию e), затем дифференцируем по y, рассматривая x как функцию y:

$$y\ln x=x\ln y;\quad y'\ln x+y(\ln x)'=x'\ln y+x(\ln y)';$$

$$1\cdot\ln x+y\frac{x'}{x}=x'\ln y+x\frac{1}{y}.$$

Отсюда найдем:

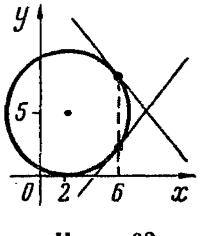
$$x'\left(\frac{y}{x}-\ln y\right)=\frac{x}{y}-\ln x;\quad x'=\frac{dx}{dy}=\frac{x(x-y\ln x)}{y(y-x\ln y)}.$$

4) Дифференцируя по x, получим $2x+2yy'-4-10y'=0$.

Отсюда имеем $y'=\frac{x-2}{5-y}$.

Подставляя заданное значение $x=6$ в исходное уравнение, найдем два соответствующих ему значения y: $y_1=2$; $y_2=8$. Поэтому при $x=6$ и производная y' имеет два значения:

$$y'_{x=6,\ y=2}=\frac{4}{3};\quad y'_{x=6,\ y=8}=-\frac{4}{3}.$$



Черт. 32

Геометрически, в прямоугольной системе координат, заданное в условии задачи уравнение определяет окружность, у которой абсциссу $x=6$ имеют две точки: (6; 2) и (6; 8). Найденные значения производной представляют угловые коэффициенты касательных к этой окружности в той и другой точке (черт. 32).

5) *1-й способ.* Дифференцируем по t и находим s':

$$1-s'+\frac{s'}{1+s^2}=0;\quad s'=\frac{s^2+1}{s^2}=1+s^{-2}.$$

Последнее равенство снова дифференцируем по t и находим s'':

$$s''=-2s^{-3}s'=-\frac{2s'}{s^3}.$$

Заменяя здесь s' через $\frac{s^2+1}{s^2}$, окончательно получим

$$s''=-\frac{2(s^2+1)}{s^5}.$$

2-й способ. Данное равенство последовательно дифференцируем по t два раза:

$$1-s'+\frac{s'}{1+s^2}=0; \tag{а}$$

$$-s''+\frac{s''(1+s^2)-2ss's'}{(1+s^2)^2}=0. \tag{б}$$

Из уравнения (а) определяем s' и, подставляя в уравнение (б), получаем соотношение между t, s и s'', из которого и выражаем s'' через t и s. Результат будет тот же, что и при решении 1-м способом.

6) а. Дифференцируем по x и определяем y':

$$y'=1+\frac{y'}{y};\quad y'=\frac{y}{y-1}.$$

Дифференцируем последнее равенство по x и определяем y''

$$y''=\frac{y'(y-1)-y'y}{(y-1)^2}=-\frac{y'}{(y-1)^2}.$$

Подставляя вместо y' его значение, имеем $y''=-\frac{y}{(y-1)^3}$.

б. Дифференцируем данное равенство по y и определяем x':

$$1=x'+\frac{1}{y};\quad x'=\frac{y-1}{y}.$$

Дифференцируем полученное равенство по y и определяем x'':

$$x''=\frac{1\cdot y-1(y-1)}{y^2}=\frac{1}{y^2}.$$

223. $5x^2+3xy-2y^2+2=0$; $\frac{dy}{dx}$? **224.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; $y'_{x=a}$?

225. $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$; $\frac{dx}{dy}$? **226.** $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$; $\frac{dy}{dx}$?

227. $x^3+y^3-3axy=0$; y''? **228.** $y=\operatorname{tg}(x+y)$; y''?

229*. $e^x-e^y=y-x$; y''? **230*.** $x+y=e^{x-y}$; y''?

231. $y+c_1\ln y=x+c_2$; показать, что $yy''-(y')^2+(y')^3=0$.