§ 10. Производные от функции, заданной параметрически

Если функция y от независимой переменной x задана через посредство вспомогательной переменной (параметра) t:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t),$$

то производные от y по x определятся формулами:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad \ldots \qquad \text{(A)}$$

Все эти формулы составлены по одному общему правилу: производная от параметрически заданной величины z по независимой переменной x равна отношению производных от z и от x, взятых по параметру t.

Для следующих функций, заданных параметрически, найти указанные производные:

232. 1) $\begin{cases} x = k\sin t + \sin kt \\ y = k\cos t + \cos kt; \ \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=0}? \end{cases}$

Каков геометрический смысл результата?

2) $\begin{cases} x = \alpha^2 + 2\alpha \\ y = \ln(\alpha + 1); \ \dfrac{d^2y}{dx^2}? \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 1 + e^{a\varphi} \\ y = a\varphi + e^{-a\varphi}; \ \dfrac{d^3y}{dx^3}? \end{cases}$

Решение. 1) Находим производные от x и от y по параметру t

$$\frac{dx}{dt} = k\cos t + k\cos kt; \quad \frac{dy}{dt} = -k\sin t - k\sin kt.$$

Искомая производная от y по x находится как отношение производных от y и от x по t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{k(\sin t + \sin kt)}{k(\cos t + \cos kt)} = -\frac{2\sin\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}}{2\cos\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{k+1}{2}t.$$

При $t = 0$ получим $\frac{dy}{dx} = 0$. Согласно геометрическому значению производной (§ 1) в точке $(0;\ k+1)$, где $t = 0$, касательная к графику данной функции параллельна оси Ox.

2) Находим производные от x и от y по параметру α:

$$\frac{dx}{d\alpha} = 2\alpha + 2; \quad \frac{dy}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

и искомую производную от y по x:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha} : \frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{2(\alpha+1)^2} = \frac{1}{2}(\alpha + 1)^{-2}.$$

Далее находим производную от y' по α, а затем искомую вторую производную от y по x как отношение производных от y' и от x по α:

$$\frac{dy'}{d\alpha} = -(\alpha+1)^{-3}; \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{d\alpha} : \frac{dx}{d\alpha} = \frac{-(\alpha+1)^{-3}}{2(\alpha+1)} = -\frac{1}{2(\alpha+1)^4}.$$

3) Пользуясь общими формулами (А) для производных от функции, заданной параметрически, получим

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} = \frac{a - ae^{-a\varphi}}{ae^{a\varphi}} = e^{-a\varphi} - e^{-2a\varphi};$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} = \frac{2ae^{-2a\varphi} - ae^{-a\varphi}}{ae^{a\varphi}} = 2e^{-3a\varphi} - e^{-2a\varphi};$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} = \frac{2ae^{-2a\varphi} - 6ae^{-3a\varphi}}{ae^{a\varphi}} = 2e^{-3a\varphi} - 6e^{-4a\varphi}.$$

233. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3; \ \frac{dy}{dx}? \end{cases}$

234. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}; \ \frac{dy}{dx}? \end{cases}$

235. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t; \ \frac{d^2y}{dx^2}? \end{cases}$

236. $\begin{cases} p = \cos\alpha + \alpha\sin\alpha \\ q = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha; \ \frac{d^2q}{dp^2}? \end{cases}$

237. $\begin{cases} x = z^2 \\ y = z^3 + z; \ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{z=1}? \end{cases}$

238. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t; \ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=\frac{\pi}{6}}? \end{cases}$

§ 11. Касательная и нормаль к плоской кривой. Угол между двумя кривыми

Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат (черт. 33), то уравнения касательной и нормали к ней в точке $M(x_0, y_0)$ имеют вид:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0); \quad y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0), \tag{1}$$

где y_0' — значение в точке x_0 производной $\frac{dy}{dx}$ из уравнения кривой.

Направление кривой в каждой ее точке определяется направлением касательной к ней в этой точке. Угол между двумя пересекающимися кривыми определяется как угол между двумя прямыми, касательными к кривым в точке их пересечения (черт. 34) по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \tag{2}$$

где k_1 и k_2 — угловые коэффициенты касательных к кривым в точке их пересечения $P(x_0, y_0)$, т. е. частные значения в точ-