Далее находим производную от $y'$ по $\alpha$, а затем искомую вторую производную от $y$ по $x$ как отношение производных от $y'$ и от $x$ по $\alpha$:

$$\frac{dy'}{d\alpha}=-(\alpha+1)^{-3};\quad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{d\alpha}:\frac{dx}{d\alpha}=\frac{-(\alpha+1)^{-3}}{2(\alpha+1)}=-\frac{1}{2(\alpha+1)^4}.$$

3) Пользуясь общими формулами (А) для производных от функции, заданной параметрически, получим

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\frac{a-ae^{-a\varphi}}{ae^{a\varphi}}=e^{-a\varphi}-e^{-2a\varphi};$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\frac{2ae^{-2a\varphi}-ae^{-a\varphi}}{ae^{a\varphi}}=2e^{-3a\varphi}-e^{-2a\varphi};$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{dy''}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\frac{2ae^{-2a\varphi}-6ae^{-3a\varphi}}{ae^{a\varphi}}=2e^{-3a\varphi}-6e^{-4a\varphi}.$$

233. $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3; \ \dfrac{dy}{dx}? \end{cases}$

234. $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}; \ \dfrac{dy}{dx}? \end{cases}$

235. $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t; \ \dfrac{d^2y}{dx^2}? \end{cases}$

236. $\begin{cases} p=\cos\alpha+\alpha\sin\alpha \\ q=\sin\alpha-\alpha\cos\alpha; \ \dfrac{d^2q}{dp^2}? \end{cases}$

237. $\begin{cases} x=z^2 \\ y=z^3+z; \ \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{z=1}? \end{cases}$

238. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t; \ \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=\frac{\pi}{6}}? \end{cases}$

## § 11. Касательная и нормаль к плоской кривой. Угол между двумя кривыми

Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат (черт. 33), то уравнения касательной и нормали к ней в точке $M(x_0, y_0)$ имеют вид:

$$y-y_0=y'_0(x-x_0);\quad y-y_0=-\frac{1}{y'_0}(x-x_0), \tag{1}$$

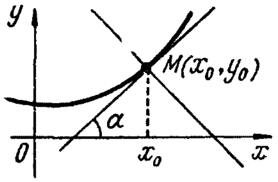
где $y'_0$ — значение в точке $x_0$ производной $\frac{dy}{dx}$ из уравнения кривой.

*Направление кривой в каждой ее точке определяется направлением касательной к ней в этой точке.* Угол между двумя пересекающимися кривыми определяется как угол между двумя прямыми, касательными к кривым в точке их пересечения (черт. 34) по формуле

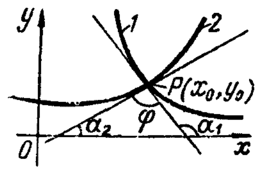
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}, \tag{2}$$

где $k_1$ и $k_2$ — угловые коэффициенты касательных к кривым в точке их пересечения $P(x_0, y_0)$, т. е. частные значения в точке $x_0$ производных от $y$ по $x$ из уравнений этих кривых:

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=x_0}; \; k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=x_0}.$$



Черт. 33



Черт. 34

**239.** Составить уравнения касательной и нормали:

1) *к параболе* $y = x^2 - 4x$ *в точке, где* $x = 1$;

2) к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью $Ox$;

3) к циклоиде $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ в точке, где $t = \frac{\pi}{2}$;

4) * к кривой $y = |x^3 - 1|$ в ее угловой точке.

Решение. 1) Подставляя в уравнение параболы заданную абсциссу точки касания $x = 1$, найдем ее ординату $y = -3$.

Для определения углового коэффициента касательной $y_0'$ находим производную от $y$ по $x$ из уравнения параболы и вычисляем ее частное значение в точке $x = 1$:

$$y' = 2x - 4; \; y_0' = y'(1) = -2.$$

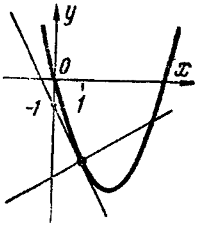
Подставляя значения $x_0$, $y_0$ и $y_0'$ в общие уравнения (1), получим уравнение касательной

$$y + 3 = -2(x - 1) \text{ или } 2x + y + 1 = 0$$

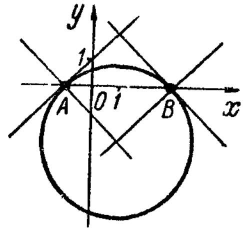
и уравнение нормали

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \text{ или } x - 2y - 7 = 0.$$

Парабола, касательная и нормаль построены на черт. 35.



Черт. 35



Черт. 36

2) Решая совместно заданное уравнение окружности и уравнение оси $Ox$, $y=0$, находим точки их пересечения: $A(-1; 0)$, $B(3; 0)$ черт. 36. Дифференцируя по $x$ уравнение окружности $2x+2yy'-2+4y'=0$, находим производную $y'=\frac{1-x}{2+y}$ и вычисляем ее значения для точек $A$ и $B$: $y'_A=1$, $y'_B=-1$. Подставляя в общие уравнения (1), получим искомые уравнения касательной и нормали:

для точки $A$ соответственно $x-y+1=0$ и $x+y+1=0$;
для точки $B$ $x+y-3=0$ и $x-y-3=0$.

3) Подставляя в уравнения циклоиды $t=\frac{\pi}{2}$, находим координаты точки касания: $x=\frac{\pi}{2}-1$; $y=1$.

Затем определяем производную от $y$ по $x$ из уравнений циклоиды, как от функции, заданной параметрически

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

и вычисляем ее значение для точки касания $y'_0=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Подставляя $x_0$, $y_0$ и $y'_0$ в уравнения (1), получим уравнение касательной $2x-2y-\pi+4=0$ и уравнение нормали $2x+2y-$ $-\pi=0$.

4)* Найдем производную $y'$ и затем угловую точку данной кривой из условия, что для этой точки производная $y'$ не существует, но существуют различные односторонние производные:

$$y'=|x^3-1|'=\pm 3x^2,$$

где плюс соответствует интервалу $x>1$, в котором $x^3-1>0$, а минус — интервалу $x<1$, где $x^3-1<0$.

Отсюда заключаем, что точка, где $x=1$, является угловой; в этой точке кривая имеет две односторонние касательные с угловыми коэффициентами

$$k_1=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_{(-)}\ (1)=-3 \text{ и } k_2=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_{(+)}\ (1)=3.$$

Пользуясь общими уравнениями (1), получим уравнения касательных $3x-y-3=0$ и $3x+y-3=0$ и уравнения нормалей $x+3y-1=0$ и $x-3y-1=0$ (черт. 37).

**240.** Найти углы, под которыми пересекаются следующие линии:

1) прямая $x+y-4=0$ и парабола $2y=8-x^2$;
2) эллипс $x^2+4y^2=4$ и парабола $4y=4-5x^2$;
3) синусоида $y=\sin x$ и косинусоида $y=\cos x$.

Решение. 1) Совместно решая уравнения параболы и прямой, находим, что они пересекаются в двух точках: $A(0;\ 4)$ и $B(2;\ 2)$, черт. 38.

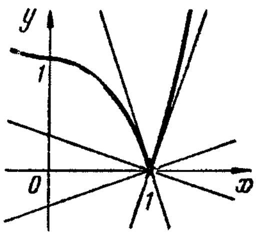
Далее находим производную от $y$ по $x$ из уравнения параболы: $2y' = -2x$, $y' = -x$ и определяем угловые коэффициенты касательных к параболе в точках $A$ и $B$, как частные значения этой производной:

$$y'_A = k_A = 0;\quad y'_B = k_B = -2.$$

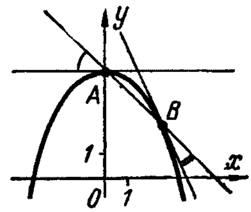
Угловой коэффициент прямой один и тот же во всех ее точках; у данной прямой он равен $-1$.

Согласно формуле (2) получим

$$\operatorname{tg} A = 1,\ A = 45°;\quad \operatorname{tg} B = \frac{-1+2}{1+2} = \frac{1}{3},\quad B \approx 18{,}5°.$$




Черт. 37




Черт. 38

2) Решая совместно уравнения кривых, находим их общие точки: $A(1{,}2;\ -0{,}8)$, $B(0;\ 1)$ и $C(-1{,}2;\ -0{,}8)$, черт. 39. Затем определяем угловые коэффициенты $k_1$ и $k_2$ касательных в любой точке эллипса и параболы как производные от $y$ по $x$ из их уравнений

$$k_1 = -\frac{x}{4y} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{5}{2}x.$$

Подставляя координаты точки $A$, получим $k_1 = \frac{3}{8}$ и $k_2 = -3$. Следовательно, в точке $A$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{3}{8}+3}{1-\frac{9}{8}} = -27;\quad \varphi \approx 92°.$$

Под таким же углом кривые пересекаются и в точке $C$ вследствие их симметричности относительно оси $Oy$.

В точке $B$ имеем: $k_1 = k_2 = 0$, следовательно, в точке $B$ кривые имеют общую касательную, т. е. касаются друг друга. В этой точке угол между кривыми равен нулю.

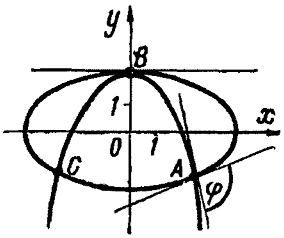
3) Абсциссы точек пересечения кривых (черт. 40) определяются уравнением $\sin x = \cos x$, решая которое, получим

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi \; (n = 0, \; \pm 1, \; \pm 2 \; \ldots).$$

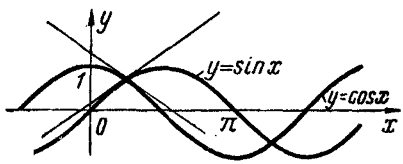
Дифференцированием находим угловые коэффициенты касательных к синусоиде и косинусоиде: $k_1 = \cos x$; $k_2 = -\sin x$. Искомый угол между кривыми определяем по общей формуле (2)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos x + \sin x}{1 - \cos x \sin x} = \pm \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \pm 2\sqrt{2}.$$

Положительному знаку соответствует острый угол $\varphi \approx 70{,}5°$, отрицательному — тупой, смежный с ним угол $\varphi_1 \approx 109{,}5°$.



Черт. 39



Черт. 40

**241.** В каких точках кривой $x = t - 1$, $y = t^3 - 12t + 1$ касательная параллельна: 1) оси $Ox$; 2) прямой $9x + y + 3 = 0$?

Решение. Используем здесь условие параллельности прямых, заключающееся в равенстве их угловых коэффициентов. Найдем производную от $y$ по $x$ из уравнений кривой:

$$y' = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2 - 12}{1} = 3t^2 - 12.$$

Эта производная представляет угловой коэффициент касательной к данной кривой в любой ее точке.

1) Приравнивая $y'$ угловому коэффициенту оси $Ox$, который равен нулю, получим $3t^2 - 12 = 0$; $t^2 = 4$; $t = \pm 2$.

Подставляя эти значения параметра $t$ в данные уравнения кривой, найдем координаты тех ее точек, где касательная параллельна оси $Ox$: $(1; -15)$; $(-3; 17)$.

2) Приравнивая $y'$ угловому коэффициенту данной прямой, который равен $-9$, получим $3t^2 - 12 = -9$; $t^2 = 1$; $t = \pm 1$.

По найденным значениям параметра $t$ из уравнений кривой определяем координаты искомых точек, где касательная к кривой параллельна данной прямой: $(0; \; -10)$, $(-2; \; 12)$.

**242***. Составить уравнения касательных к параболе $y=x^2-4x+1$, проходящих через не лежащую на ней точку: 1) $O(0;\ 0)$; 2) $A(1;\ 1)$.

Решение. Уравнение касательной к данной параболе имеет общий вид

$$y-y_0=(x^2-4x+1)'_0(x-x_0),$$

или

$$y-(x_0^2-4x_0+1)=(2x_0-4)(x-x_0),$$

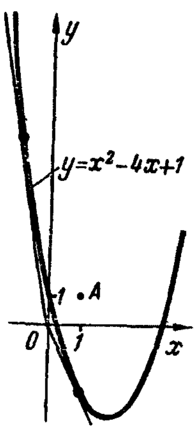
где $(x,\ y)$ — текущая точка на касательной;

$(x_0,\ y_0)$ — неизвестная точка касания.

1) Так как касательная проходит через точку $O$, то

$$0-(x_0^2-4x_0+1)=(2x_0-4)(0-x_0).$$

Решая это квадратное уравнение, находим для абсциссы точки касания $x_0$ два значения: $x_0=\pm 1$, а отсюда и уравнения двух касательных: $2x+y=0$ и $6x+y=0$.



Черт. 41

2) Для точки $A$ те же рассуждения приводят к квадратному уравнению $x_0^2-2x_0+4=0$, корни которого комплексные. Поэтому через точку $A$ нельзя провести к данной параболе ни одной касательной.

Полученные результаты имеют простой геометрический смысл: из каждой точки, принадлежащей внешней области параболы, можно провести к ней две касательные, а из точки, принадлежащей ее внутренней области, — ни одной (черт. 41).

В общем случае задача о проведении касательных к кривой $y=f(x)$ через точку $(a,\ b)$, не лежащую на этой кривой, решается этим же способом, исходя из общего уравнения касательной

$$y-y_0=y'_0(x-x_0).$$

Эта задача имеет столько же решений, сколько вещественных корней имеет уравнение

$$b-f(x_0)=f'(x_0)(a-x_0).$$

В задачах 243—248 найти уравнения касательных и нормалей к данным кривым в указанных точках и построить кривые, касательные и нормали.

**243.** К параболе $y=4-x^2$ в точке, где $x=-1$.

**244.** К гиперболе $y^2-2x^2=1$ в точках, где $x=2$.

**245.** К эллипсу $x=2\sqrt{3}\cos t$, $y=2\sin t$ в точке, где $t=\frac{\pi}{6}$.

**246.** К астроиде $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ в точке, где $t = \frac{\pi}{4}$.

**247*.** К кривой $y = |\sin x|$ в ее угловой точке, где $x = \pi$.

**248*.** К кривой $y = |2x - x^2|$ в ее угловых точках.

В задачах 249—254 найти углы, под которыми пересекаются данные линии, и построить эти линии и углы.

**249.** $9y = x^3$; $x - y = 0$. **250.** $y = \cos x$; $2y = 1$.

**251*.** $y^2 = 2ax + a^2$; $y^2 = b^2 - 2bx$. **252.** $y = e^x$; $y = e^{3x}$.

**253.** $x^2 - y^2 = 6$; $x^2 + 4y^2 = 16$. **254.** $y = \sin x$; $y = \sin 2x$.

**255.** Зная, что касательная к параболе $y = ax^2 + bx + c$ в ее вершине параллельна оси $Ox$, найти вершины следующих парабол:

1) $y = x^2 + 2x - 1$; 2) $y = 1 + 8x - 2x^2$; 3) $2y = 2x - x^2$ и построить их.

**256.** На окружности $x^2 + y^2 = 25$ найти точки, где касательная параллельна прямой $3x + 4y - 12 = 0$. Построить окружность, прямую и касательные.

**257.** На каждой из следующих кривых:

1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$; 2) $y = x + \sqrt{x}$;
3) $x = t^2 + 1$, $y = 3 - t^2$; 4) $x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$

найти такие точки, где касательная параллельна оси $Ox$.

**258.** Найти угол между касательными к эллипсу $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, в точках, где $t = \frac{\pi}{6}$ и $t = \frac{\pi}{3}$. Построить эллипс и касательные.

**259*.** Построить на отрезке $[-2; 2]$ график функции $y = |x^3 + x|$ и найти угол между касательными в его угловой точке.

**260.** Построить и найти углы, образуемые параболой $y = 2x - x^2$ и хордой, соединяющей ее точки с абсциссами 1 и 4.

**261*.** Определить угол между касательными к параболе $y = x^2 - 3x + 1$, проведенными из точки $(4; 1)$. Построить параболу и касательные.

## § 12. Скорость изменения переменной величины. Скорость и ускорение прямолинейного движения

Если величина $z$ изменяется с течением времени $t$, то скорость ее изменения определяется производной $\frac{dz}{dt}$.

Зная зависимость между двумя переменными $x$ и $y$, можно найти зависимость между скоростями их изменения по формуле производной сложной функции

$$\frac{ay}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$