246. К астроиде $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ в точке, где $t=\frac{\pi}{4}$.

247*. К кривой $y=|\sin x|$ в ее угловой точке, где $x=\pi$.

248*. К кривой $y=|2x-x^2|$ в ее угловых точках.

В задачах 249—254 найти углы, под которыми пересекаются данные линии, и построить эти линии и углы.

249. $9y=x^3$; $x-y=0$. 250. $y=\cos x$; $2y=1$.

251*. $y^2=2ax+a^2$; $y^2=b^2-2bx$. 252. $y=e^x$; $y=e^{3x}$.

253. $x^2-y^2=6$; $x^2+4y^2=16$. 254. $y=\sin x$; $y=\sin 2x$.

255. Зная, что касательная к параболе $y=ax^2+bx+c$ в ее вершине параллельна оси Ox, найти вершины следующих парабол:

1) $y=x^2+2x-1$; 2) $y=1+8x-2x^2$; 3) $2y=2x-x^2$ и построить их.

256. На окружности $x^2+y^2=25$ найти точки, где касательная параллельна прямой $3x+4y-12=0$. Построить окружность, прямую и касательные.

257. На каждой из следующих кривых:

1) $y=2x^3-9x^2+12x-5$; 2) $y=x+\sqrt{x}$;
3) $x=t^2+1$, $y=3-t^2$; 4) $x^2+3y^2-2x+6y-8=0$

найти такие точки, где касательная параллельна оси Ox.

258. Найти угол между касательными к эллипсу $x=2\cos t$, $y=3\sin t$, в точках, где $t=\frac{\pi}{6}$ и $t=\frac{\pi}{3}$. Построить эллипс и касательные.

259*. Построить на отрезке $[-2; 2]$ график функции $y=|x^3+x|$ и найти угол между касательными в его угловой точке.

260. Построить и найти углы, образуемые параболой $y=2x-x^2$ и хордой, соединяющей ее точки с абсциссами 1 и 4.

261*. Определить угол между касательными к параболе $y=x^2-3x+1$, проведенными из точки $(4; 1)$. Построить параболу и касательные.

§ 12. Скорость изменения переменной величины. Скорость и ускорение прямолинейного движения

Если величина z изменяется с течением времени t, то скорость ее изменения определяется производной $\frac{dz}{dt}$.

Зная зависимость между двумя переменными x и y, можно найти зависимость между скоростями их изменения по формуле производной сложной функции

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Если точка движется прямолинейно, то ее скорость v и ускорение w определяются первой и второй производными от пути s по времени t:

$$v=\frac{ds}{dt};\quad w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

262. Точка движется по кубической параболе $12y=x^3$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

Решение. Считая в уравнении параболы y сложной функцией от времени t и дифференцируя его по t, получим

$$12\frac{dy}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}.$$

Отсюда найдем отношение скоростей изменения ординаты и абсциссы:

$$\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{x^2}{4}.$$

При $|x|<2$ это отношение будет меньше единицы, при $|x|=2$ — равно единице и при $|x|>2$ оно будет больше единицы. Следовательно:

1) при $-2<x<2$ ордината изменяется медленнее абсциссы;

2) при $x=\pm 2$ скорости изменения абсциссы и ординаты одинаковы:

3) при $x<-2$ и $x>2$ ордината изменяется быстрее абсциссы.

263. Резервуар, имеющий форму полушара с внутренним радиусом R (*м*), наполняется водой со скоростью Q (*л*) в секунду. Определить скорость повышения уровня воды в резервуаре в момент, когда он будет равен $0{,}5R$.

Решение. Обозначим через h уровень воды в *м* и через v ее объем в *м*^{3}. Найдем зависимость между переменными h и v, пользуясь формулой для объема шарового сегмента

$$v=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$

Дифференцируя это равенство по времени t, найдем зависимость между скоростями изменения переменных h и v:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi\left[2h\left(R-\frac{h}{3}\right)-\frac{1}{3}h^2\right]\frac{dh}{dt}=\pi\,(2Rh-h^2)\frac{dh}{dt}.$$

Полагая, согласно условию, $\frac{dv}{dt}=0{,}001\,Q\left(\frac{м^3}{сек}\right)$,

получим $\frac{dh}{dt}=\frac{0{,}001\,Q}{\pi h\,(2R-h)}\left(\frac{м}{сек}\right)$.

При $h=\frac{R}{2}$ получим $\frac{dh}{dt}=\frac{0{,}004\,Q}{3\pi R^2}\left(\frac{м}{сек}\right)$.

264. Скорость прямолинейного движения тела пропорциональна квадратному корню из пройденного пути (как, например, при свободном падении). Доказать, что это движение происходит под действием постоянной силы.

Решение. По закону Ньютона сила F, вызывающая движение, пропорциональна ускорению

$$F = k\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Согласно условию $\frac{ds}{dt} = \lambda\sqrt{s}$. Дифференцируя это равенство, найдем

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}} \cdot \lambda\sqrt{s} = \frac{\lambda^2}{2}.$$

Следовательно, действующая сила $F = \frac{k\lambda^2}{2}$ (const).

265. Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x = A\sin\omega t$. Определить скорость и ускорение движения в момент времени $t = \frac{2\pi}{\omega}$. Показать, что ускорение движения пропорционально отклонению x.

Решение. Найдем скорость v и ускорение w движения в любой момент времени t:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t; \quad w = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t.$$

При $t = \frac{2\pi}{\omega}$, $v = A\omega$, $w = 0$.

Сравнивая выражения для ускорения w и для отклонения x, видим, что первое отличается от второго только постоянным множителем: $w = -\omega^2 x$.

266. Зависимость количества Q вещества, получаемого в химической реакции, от времени t определяется формулой $Q = a(1 + be^{-mt})$. Определить скорость реакции.

267. Точка движется по параболе $y = 5 - x^2$ так, что ее абсцисса x изменяется с течением времени t по закону $x = at^2$. С какой скоростью изменяется ордината точки?

268. Радиус шара r равномерно возрастает со скоростью 2 *см/сек*. С какими скоростями возрастают поверхность и объем шара? Каковы будут эти скорости в момент, когда r достигнет 10 *см*?

269. Движение точки по оси Ox определяется формулой $x = (t-2)^2 e^{-t}$. Определить скорость и ускорение движения и те моменты времени, когда точка меняет направление движения.

270. Точка массы m колеблется по оси Ox так, что в момент времени t ее отклонение x от положения равновесия определяется уравнением $x = Ae^{-at}\cos(at + b)$. Найти скорость движения точки и действующую на нее силу.