§ 13. Дифференциал функции

Из определений производной $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и предела переменной следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$ или $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$, где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т. е. что приращение функции можно разбить на две части.

Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменной, называется дифференциалом функции и обозначается знаком d:

$$dy = y'\,\Delta x.$$

Дифференциал независимой переменной x равен ее приращению, $dx = \Delta x$. Поэтому

$$dy = y'\,dx, \tag{a}$$

т. е. *дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал независимой переменной.*

Для всякой данной функции $y = f(x)$ производная y' зависит только от одной переменной x, тогда как ее дифференциал dy зависит от двух независимых друг от друга переменных: x и Δx.

Нахождение дифференциала функции называется дифференцированием, так же как и нахождение производной, так как согласно формуле (а), чтобы найти дифференциал какой-либо функции, надо найти производную этой функции и умножить ее на дифференциал независимой переменной.

Формула (а) верна и в случае, если y есть сложная функция, т. е. если x есть функция переменной t.

При достаточно малых значениях $|dx|$ приращение функции может быть заменено ее дифференциалом с как угодно малой относительной ошибкой:

$$\Delta y \approx dy.*$$

Это приближенное равенство применяется для приближенных вычислений, так как вычисление дифференциала функции значительно проще, чем вычисление ее приращения.

271. Найти дифференциалы функций:

1) $y = x^3 - 3^x$; 2) $F(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}$;

3) $z = \ln(1 + e^{10x}) + \operatorname{arcctg} e^{5x}$; вычислить $dz|_{x=0;\ dx=0,1}$.

Решение. Находим производную данной функции и, умножив ее на дифференциал независимой переменной, получим

---

* Исключая точки, где $y' = 0$.

искомый дифференциал данной функции:

1) $dy = y'\,dx = (x^3 - 3^x)'\,dx = (3x^2 - 3^x \ln 3)\,dx$;

2) $dF(\varphi) = d\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}\right) = \left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{3}{\varphi}\right)' d\varphi =$

$= \left[-\sin\frac{\varphi}{3} \cdot \left(\frac{\varphi}{3}\right)' + \cos\frac{3}{\varphi} \cdot \left(\frac{3}{\varphi}\right)'\right] d\varphi = -\left(\frac{1}{3}\sin\frac{\varphi}{3} + \frac{3}{\varphi^2}\cos\frac{3}{\varphi}\right) d\varphi$;

3) $dz = \left[\frac{(1+e^{10x})'}{1+e^{10x}} - \frac{(e^{5x})'}{1+e^{10x}}\right] dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} - \frac{5e^{5x}}{1+e^{10x}}\right) dx =$

$$= \frac{5e^{5x}(2e^{5x} - 1)}{1+e^{10x}}\,dx.$$

Полагая $x = 0$ и $dx = 0,1$, получим $dz = 0,25$.

272. Вычислить приближенное значение: 1) $\sqrt[4]{17}$; 2) $\operatorname{arc\,tg} 0,98$: 3) $\sin 29^\circ$.

Решение. Если требуется вычислить $f(x_1)$ и если проще вычислить $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, то при достаточно малой по абсолютному значению разности $x_1 - x_0 = dx$ можно заменить приращение функции ее дифференциалом $f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,dx$ и отсюда найти приближенное значение искомой величины по формуле

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx. \tag{б}$$

1) Будем рассматривать $\sqrt[4]{17}$ как частное значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 17 = x_1$. Пусть $x_0 = 16$, тогда $f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$, $f'(x_0) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Big|_{x=16} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}$, $dx = x_1 - x_0 = 1$.

Подставляя в формулу (б), получим

$$\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx = 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2,031.$$

2) Пусть $\operatorname{arctg} 0,98$ есть частное значение функции $y = \operatorname{arctg} x$ при $x = 0,98 = x_1$. Пусть $x_0 = 1$, тогда $y(x_0) = \frac{\pi}{4}$, $y'(x_0) = \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$, $dx = x_1 - x_0 = -0,02$.

Пользуясь формулой (б), найдем:

$$\operatorname{arctg} 0,98 \approx y(x_0) + y'(x_0)\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-0,02) \approx 0,7754.$$

3) Полагая, что $\sin 29°$ есть частное значение функции $y = \sin x$ при $x = \frac{\pi}{180} \cdot 29 = x_1$ и что $x_0 = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}$, получим

$$y(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad y'(x_0) = \cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$dx = x_1 - x_0 = \frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180};$$

$$\sin 29° \approx y(x_0) + y'(x_0)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0{,}4848.$$

Найти дифференциалы функций:

273. $y = (a + bx)^m$. **274.** $z = e^{-t}(2 - 2t - t^2)$.

275. $u = \frac{x^n}{n^2}(1 - n\ln x)$. **276.** $v = (1 - \ln\sin\varphi)\sin\varphi$.

Вычислить с точностью до 0,01 дифференциалы функций:

277. $y = x(1 + x)(1 - x)$ при $x = -10$ и $dx = 0{,}1$.

278. $z = x\sqrt{x^2 + 5}$ при $x = 2$ и $dx = \frac{1}{5}$.

279. $r = \varphi + (\varphi^2 + 1)\operatorname{arcctg}\varphi$ при $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ и $d\varphi = 0{,}2$.

280. $v = \frac{2\sin 2x - 3\cos 2x}{e^{3x}}$ при $x = 0$ и $dx = -0{,}03$.

281. Вычислить приближенное значение функции $y = x^7 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ при $x = 1{,}002$, исходя из ее значения при $x = 1$ и заменяя приращение функции дифференциалом *.

282. Найти приближенное значение $\operatorname{tg} 44°56'$, исходя из значения функции $y = \operatorname{tg} x$ при $x = 45°$ и заменяя ее приращение дифференциалом *.

283. Найти приближенное значение $\arccos 0{,}4993$, исходя из значения функции $y = \arccos x$ при $x = 0{,}5$ и заменяя ее приращение дифференциалом *.

284. Найти приближенное значение $\ln 1{,}01$.*

285. Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$.*

§ 14. Вектор-функция скалярного аргумента и ее дифференцирование. Касательная к пространственной кривой

Переменный вектор $\bar{r}$ называется вектор-функцией скалярного аргумента t, если каждому рассматриваемому числовому значению t соответствует определенное значение $\bar{r}$ (т. е. определенный модуль и определенное направление вектора $\bar{r}$).

---

* Все вычисления выполнять с четырьмя десятичными знаками.