3) Полагая, что $\sin 29°$ есть частное значение функции $y = \sin x$ при $x = \frac{\pi}{180} \cdot 29 = x_1$ и что $x_0 = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}$, получим

$$y(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad y'(x_0) = \cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$dx = x_1 - x_0 = \frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180};$$

$$\sin 29° \approx y(x_0) + y'(x_0)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0{,}4848.$$

Найти дифференциалы функций:

273. $y = (a + bx)^m$. **274.** $z = e^{-t}(2 - 2t - t^2)$.

275. $u = \frac{x^n}{n^2}(1 - n\ln x)$. **276.** $v = (1 - \ln\sin\varphi)\sin\varphi$.

Вычислить с точностью до 0,01 дифференциалы функций:

277. $y = x(1 + x)(1 - x)$ при $x = -10$ и $dx = 0{,}1$.

278. $z = x\sqrt{x^2 + 5}$ при $x = 2$ и $dx = \frac{1}{5}$.

279. $r = \varphi + (\varphi^2 + 1)\operatorname{arcctg}\varphi$ при $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ и $d\varphi = 0{,}2$.

280. $v = \frac{2\sin 2x - 3\cos 2x}{e^{3x}}$ при $x = 0$ и $dx = -0{,}03$.

281. Вычислить приближенное значение функции $y = x^7 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ при $x = 1{,}002$, исходя из ее значения при $x = 1$ и заменяя приращение функции дифференциалом*.

282. Найти приближенное значение $\operatorname{tg} 44°56'$, исходя из значения функции $y = \operatorname{tg} x$ при $x = 45°$ и заменяя ее приращение дифференциалом*.

283. Найти приближенное значение $\arccos 0{,}4993$, исходя из значения функции $y = \arccos x$ при $x = 0{,}5$ и заменяя ее приращение дифференциалом*.

284. Найти приближенное значение $\ln 1{,}01$.*

285. Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$.*

§ 14. Вектор-функция скалярного аргумента и ее дифференцирование. Касательная к пространственной кривой

Переменный вектор $\bar{r}$ *называется вектор-функцией скалярного аргумента* t, *если каждому рассматриваемому числовому значению* t *соответствует определенное значение* $\bar{r}$ (т. е. определенный модуль и определенное направление вектора $\bar{r}$).

---

* Все вычисления выполнять с четырьмя десятичными знаками.

Если начало переменного вектора $\bar{r}=\bar{r}(t)$ неизменно помещается в начале координат O, т. е. если $\bar{r}(t)$ есть радиус-вектор $\overline{OM}$, то при изменении скаляра t его подвижный конец M описывает некоторую линию, которая называется **годографом** этого вектора.

При разложении радиуса-вектора $\bar{r}(t)$ по ортам $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ его проекции $r_x=x(t)$, $r_y=y(t)$, $r_z=z(t)$ совпадают с координатами его конца $M(x, y, z)$, а система $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ представляет параметрические уравнения его годографа.

Производной вектор-функции $\bar{r}(t)$ называется предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$; она обозначается $\frac{d\bar{r}}{dt}$, или $\dot{\bar{r}}$, или $\bar{r}'$.

Правила дифференцирования (нахождения производной) вектор-функции $\bar{r}(t)$ аналогичны правилам дифференцирования скалярных функций:

$$\bar{c}'=0, \text{ если } \bar{c}\text{ — постоянный вектор.}$$

$$(\bar{r}_1\pm\bar{r}_2)'=\bar{r}_1'\pm\bar{r}_2'; \quad (\bar{r}u)'=\bar{r}'u+\bar{r}u'.$$

Если $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$, то $\dot{\bar{r}}=\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}+\dot{z}\bar{k}$. Вектор $\dot{\bar{r}}$ направлен по касательной к годографу вектора $\bar{r}$.

Если вектор $\bar{r}(t)$ изменяется только по направлению, то его годограф представляет линию, расположенную на сфере радиуса $R=|\bar{r}|$ с центром в начале координат, а вектор $\dot{\bar{r}}$ перпендикулярен к годографу вектора $\bar{r}$; если вектор $\bar{r}(t)$ изменяется только по модулю, то его годограф представляет луч, исходящий из начала координат, а вектор $\dot{\bar{r}}$ направлен по этому лучу.

Всякую кривую можно рассматривать как годограф радиуса-вектора ее текущей точки $M(x, y, z)$. Поэтому, если $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ — параметрические уравнения кривой и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка этой кривой, то касательная прямая к этой кривой в точке M_0 определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{\dot{x}_0}=\frac{y-y_0}{\dot{y}_0}=\frac{z-z_0}{\dot{z}_0}, \qquad (1)$$

а нормальная плоскость (перпендикулярная к касательной) определяется уравнением

$$(x-x_0)\dot{x}_0+(y-y_0)\dot{y}_0+(z-z_0)\dot{z}_0=0. \qquad (2)$$

286. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой:

1) $x=t^3$, $y=t^2$, $z=t$ в точке, где $t=-1$;

2) $x=y^2$, $y=z^2$ в точке, где $z=2$.

Решение. 1) Определяем координаты точки касания: $x=-1$, $y=1$, $z=-1$ (подставляя $t=-1$ в данные уравнения). Находим производные от x, y и z по t и вычисляем их значения в точке касания: $\dot{x}=3t^2$, $\dot{y}=2t$, $\dot{z}=1$; $\dot{x}(-1)=3$, $\dot{y}(-1)=-2$, $\dot{z}(-1)=1$.

Подставляя в общие уравнения (1) и (2) координаты точки касания и вычисленные значения производных, получим уравнения касательной прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}$ и уравнение нормальной плоскости $3(x+1)-2(y-1)+z+1=0$ или $3x-2y+$ $+z+6=0$.

2) Здесь кривая определена как пересечение двух поверхностей. Вначале преобразуем уравнения кривой к параметрическому виду. Полагая $z=t$, получим $y=t^2$, $x=t^4$.*

Далее определяем координаты точки касания: $x=16$, $y=4$, $z=2$ и значения производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в этой точке: $\dot{x}=4t^3$, $\dot{y}=2t$, $\dot{z}=1$; $\dot{x}(2)=32$, $\dot{y}(2)=4$, $\dot{z}(2)=1$.

Подставляя в общие уравнения (1) и (2), получим уравнения касательной

$$\frac{x-16}{32}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-2}{1}$$

и уравнение нормальной плоскости

$$32(x-16)+4(y-4)+z-2=0 \quad \text{или} \quad 32x+4y+z-530=0.$$

287. Найти уравнения касательной к винтовой линии $y=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ в точке, где $t=t_0$, и угол, образуемый ею с осью Oz.

Решение. Обозначив координаты точки касания (x_0, y_0, z_0) и пользуясь общими уравнениями (1), получим следующие уравнения касательной:

$$\frac{x-x_0}{-a\sin t_0}=\frac{y-y_0}{a\cos t_0}=\frac{z-z_0}{b}.$$

Отсюда направляющий косинус угла, образованного касательной с осью Oz:

$$\cos\gamma=\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2\sin^2 t_0+a^2\cos^2 t_0+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Этот результат показывает, что все касательные к винтовой линии образуют с осью Oz один и тот же угол.

---

* Можно получить и другие параметрические уравнения данной линии. Вообще, если линия задана уравнениями $f(x, y, z)=0$, $F(x, y, z)=0$, то для нее можно получить бесчисленное множество различных параметрических уравнений вида $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, $z=\varphi_3(t)$.

В задачах 288—290 написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой:

288. $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ в точке, где $t=1$.

289. $x=\cos^2\frac{t}{2}$, $y=\sin t$, $z=\sin\frac{t}{2}$ в точке, где $t=\pi$.

290. $y=x$, $z=x^2-y^2$ в начале координат.

291.* Найти направляющие косинусы касательного вектора к кривой $y^2=2x$, $z^2=8x$ в точках, где $x=2$.

§ 15. Скорость и ускорение криволинейного движения

Если в любой момент времени t положение движущейся точки M определяется ее радиусом-вектором $\overline{OM}=\bar{r}(t)$, то $\dot{\bar{r}}$ есть вектор скорости, $\ddot{\bar{r}}$ есть вектор ускорения, а годограф вектора $\bar{r}$ есть траектория движения точки M.

Вектор скорости $\dot{\bar{r}}$ направлен по касательной к траектории, а его модуль равен производной от пути по времени $|\dot{\bar{r}}|=\frac{ds}{dt}$.

292. Зная уравнение движения точки, определить (назвать), какую линию представляет ее траектория и найти скорость и ускорение этой точки:

1) $\bar{r}=(3t-2)\,\bar{i}-4t\bar{j}$; 2) $\bar{r}=2\cos t\cdot\bar{i}+\sin t\cdot\bar{k}$;

3) $\bar{r}=(2t^2-3)\,\bar{i}-3t^2\bar{j}+(4t^2-5)\,\bar{k}$;

4) $\bar{r}=a\sin\omega t\cdot\bar{i}+a\cos\omega t\cdot\bar{j}+bt\bar{k}$.

Решение. 1) Траектория точки есть годограф ее радиуса-вектора $\bar{r}\{3t-2;\ -4t\}$, т. е. линия, определяемая параметрическими уравнениями $x=3t-2$, $y=-4t$. Исключая из них параметр (время) t, получим прямую $4x+3y+8=0$, расположенную в плоскости xOy.

Скорость $\bar{v}$ и ускорение $\bar{w}$ движения точки найдем как первую и вторую производные от $\bar{r}$ по t:

$$\bar{v}=\dot{\bar{r}}=3\bar{i}-4\bar{j};\quad \bar{w}=\ddot{\bar{r}}=0.$$

Следовательно, точка движется прямолинейно с постоянной скоростью, модуль которой $|\bar{v}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

2) Здесь траектория точки есть эллипс, определяемый параметрическими уравнениями $x=2\cos t$, $z=\sin t$ или уравнением $\frac{x^2}{4}+z^2=1$, который расположен в плоскости xOz.

Скорость точки $\bar{v}=\dot{\bar{r}}=-2\sin t\cdot\bar{i}+\cos t\cdot\bar{k}$, ускорение $\bar{w}=\ddot{\bar{r}}=$ $=-2\cos t\cdot\bar{i}-\sin t\cdot\bar{k}$.