В задачах 288—290 написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой:

288. $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ в точке, где $t=1$.

289. $x=\cos^2\frac{t}{2}$, $y=\sin t$, $z=\sin\frac{t}{2}$ в точке, где $t=\pi$.

290. $y=x$, $z=x^2-y^2$ в начале координат.

291.* Найти направляющие косинусы касательного вектора к кривой $y^2=2x$, $z^2=8x$ в точках, где $x=2$.

§ 15. Скорость и ускорение криволинейного движения

Если в любой момент времени t положение движущейся точки M определяется ее радиусом-вектором $\overline{OM}=\bar{r}(t)$, то $\dot{\bar{r}}$ есть вектор скорости, $\ddot{\bar{r}}$ есть вектор ускорения, а годограф вектора $\bar{r}$ есть траектория движения точки M.

Вектор скорости $\dot{\bar{r}}$ направлен по касательной к траектории, а его модуль равен производной от пути по времени $|\dot{\bar{r}}|=\frac{ds}{dt}$.

292. Зная уравнение движения точки, определить (назвать), какую линию представляет ее траектория и найти скорость и ускорение этой точки:

1) $\bar{r}=(3t-2)\,\bar{i}-4t\bar{j}$; 2) $\bar{r}=2\cos t\cdot\bar{i}+\sin t\cdot\bar{k}$;

3) $\bar{r}=(2t^2-3)\,\bar{i}-3t^2\bar{j}+(4t^2-5)\,\bar{k}$;

4) $\bar{r}=a\sin\omega t\cdot\bar{i}+a\cos\omega t\cdot\bar{j}+bt\bar{k}$.

Решение. 1) Траектория точки есть годограф ее радиуса-вектора $\bar{r}\{3t-2;\ -4t\}$, т. е. линия, определяемая параметрическими уравнениями $x=3t-2$, $y=-4t$. Исключая из них параметр (время) t, получим прямую $4x+3y+8=0$, расположенную в плоскости xOy.

Скорость $\bar{v}$ и ускорение $\bar{w}$ движения точки найдем как первую и вторую производные от $\bar{r}$ по t:

$$\bar{v}=\dot{\bar{r}}=3\bar{i}-4\bar{j};\quad \bar{w}=\ddot{\bar{r}}=0.$$

Следовательно, точка движется прямолинейно с постоянной скоростью, модуль которой $|v|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

2) Здесь траектория точки есть эллипс, определяемый параметрическими уравнениями $x=2\cos t$, $z=\sin t$ или уравнением $\frac{x^2}{4}+z^2=1$, который расположен в плоскости xOz.

Скорость точки $\bar{v}=\dot{\bar{r}}=-2\sin t\cdot\bar{i}+\cos t\cdot\bar{k}$, ускорение $\bar{w}=\ddot{\bar{r}}=$ $=-2\cos t\cdot\bar{i}-\sin t\cdot\bar{k}$.

3) Параметрические уравнения траектории точки $x=2t^2-3$, $y=-3t^2$, $z=4t^2-5$ после исключения параметра t преобразуются в канонические уравнения прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+5}{4}$.

Скорость точки $\bar{v}=\dot{\bar{r}}=4t\bar{i}-6t\bar{j}+8t\bar{k}$, ускорение $\bar{w}=\ddot{\bar{r}}=4\bar{i}-6\bar{j}+8\bar{k}$ — постоянно (не зависит от времени t).

Здесь движение точки является прямолинейным и равномерно-переменным.

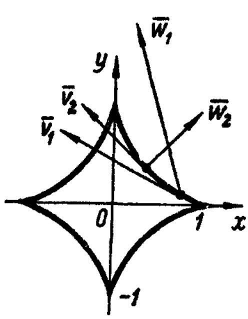
4) Траектория точки есть цилиндрическая винтовая линия $x=a\sin\omega t$, $y=a\cos\omega t$, $z=bt$.

Скорость точки $v=\dot{\bar{r}}=a\omega\cos\omega t\cdot\bar{i}-a\omega\sin\omega t\cdot\bar{j}+b\bar{k}$,

ускорение $\bar{w}=\ddot{\bar{r}}=-a\omega^2\sin\omega t\cdot\bar{i}-a\omega^2\cos\omega t\cdot\bar{j}$.

Здесь движение точки является равномерным, так как модуль скорости $|\bar{v}|=\sqrt{a^2\omega^2+b^2}$ остается неизменным.

293. Зная уравнение движения точки $\bar{r}=\cos^3 t\cdot\bar{i}+\sin^3 t\cdot\bar{j}$, построить ее траекторию и векторы скорости и ускорения в моменты времени $t_1=\frac{\pi}{6}$ и $t_2=\frac{\pi}{4}$.



Черт. 42

Решение. Траектория точки или годограф вектора $\bar{r}$ есть астроида $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$.

В любой момент времени t скорость точки $\bar{v}=\dot{\bar{r}}=-3\cos^2 t\sin t\cdot\bar{i}+3\sin^2 t\cos t\cdot\bar{j}$, а ее ускорение $\bar{w}=\ddot{\bar{r}}=3\cos t\,(3\sin^2 t-1)\,\bar{i}+3\sin t\,(3\cos^2 t-1)\,\bar{j}$.

В момент $t_1=\frac{\pi}{6}$, $\bar{v}_1=-\frac{9}{8}\bar{i}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\bar{j}$, $\bar{w}_1=-\frac{3\sqrt{3}}{8}\bar{i}+\frac{15}{8}\bar{j}$.

В момент $t_2=\frac{\pi}{4}$, $\bar{v}_2=\frac{3}{2\sqrt{2}}(\bar{j}-\bar{i})$, $\bar{w}_2=\frac{3}{2\sqrt{2}}(\bar{i}+\bar{j})$.

Траектория точки и найденные векторы ее скорости и ускорения в моменты $t_1=\frac{\pi}{6}$ и $t_2=\frac{\pi}{4}$ построены на черт. 42.*

В задачах 294—296 по данному векторному уравнению движения точки построить ее траекторию и векторы скорости и ускорения в моменты времени $t=0$ и $t=1$.

294. $\bar{r}=a\cos t\cdot\bar{i}+a\sin t\cdot\bar{j}$. **295.** $\bar{r}=3t\bar{j}+(4t-t^2)\bar{k}$.

296. $\bar{r}=3(t-\sin t)\bar{i}+3(1-\cos t)\bar{j}$.

---

* Координаты x, y начала каждого вектора определяются из уравнений траектории по данным значениям t.