ГЛАВА III

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

§ 1. Теорема (формула) Тейлора

Многочисленные применения дифференциального исчисления в естествознании и технике основываются на теоремах Ролля, Лагранжа, Коши и Тейлора. В каждой из этих теорем утверждается существование некоторого среднего значения аргумента $x=c$, вследствие чего все они называются теоремами о среднем.

Теорема Тейлора. *Функция* $f(x)$, *дифференцируемая* $n+1$ *раз в некотором интервале, содержащем точку* a, *может быть представлена в виде суммы многочлена* n*-й степени и остаточного члена* R_n:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+ \\ +\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n), \qquad \text{(T)}$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где c — некоторое среднее значение между a и x,

$$c=a+\theta(x-a), \quad 0<\theta<1.$$

Эта теорема является самой общей теоремой о среднем, из которой вытекают все остальные.

Формула Тейлора (T) позволяет приближенно представить (аппроксимировать) произвольную функцию $f(x)$ в виде многочлена

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (*)$$

(называемого многочленом Тейлора) и вместе с тем позволяет оценить возникающую при этом погрешность R_n, которая во многих случаях может быть сделана как угодно малой. Поэтому она является одной из важнейших формул математического анализа, которая широко применяется и как тонкий инструмент теоретического исследования и как средство решения многих практических задач.

Частный, простейший вид формулы Тейлора при $a=0$ принято называть формулой Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n;\quad R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (M)$$

Она дает разложение функции по степеням самой независимой переменной.

Однако для многих функций эта простейшая формула Тейлора неприменима, ибо при $x=0$ многие функции или их производные не существуют $\left(\text{например: } \ln x;\ \sqrt{x};\ \operatorname{ctg} x;\ \frac{1}{x}\right)$.

297. Каждую из данных функций аппроксимировать многочленом n-й степени относительно x, оценить погрешность и установить, при каких значениях x она может быть сделана сколь угодно малой.

1) e^x; 2) $\sin x$; 3) $\cos x$.

Решение. Чтобы получить приближенное выражение данной функции $f(x)$ в виде многочлена относительно независимой переменной x, следует написать для этой функции многочлен Маклорена. Затем для оценки той погрешности, которая возникает в результате замены данной функции ее многочленом Маклорена, следует найти остаточный член R_n формулы Маклорена, применяя его общую формулу к данной функции, и, наконец, для определения тех значений x, при которых погрешность может быть сделана сколь угодно малой, необходимо исследовать поведение остаточного члена при $n\to+\infty$ и при различных значениях x. Погрешность может быть сделана сколь угодно малой только при тех значениях x, при которых $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n=0$.

1) Вычислив значения данной функции и ее производных при $x=0$:

$$f(x)=e^x;\quad f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots=f^{(k)}(x)=e^x;$$
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(k)}(0)=1$$

и пользуясь многочленом Маклорена (*), получим искомое приближенное выражение данной трансцендентной функции в виде многочлена n-й степени:

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}. \qquad (1)$$

Погрешность этого приближенного равенства определяется остаточным членом формулы Маклорена. Для функции e^x

получим

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Очевидно, что величина погрешности R_n зависит как от степени n аппроксимирующего многочлена, так и от значений переменной x.

При неограниченном возрастании n и при любом значении x величина $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ является бесконечно малой, что было установлено в решении задачи 40, а величина $e^{\Theta x}$ является ограниченной. Поэтому при любом значении x и при $n \to +\infty$ остаточный член в разложении функции e^x неограниченно убывает, стремясь к нулю:

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = \lim \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x} = 0.$$

Из этого следует, что при любом значении x можно аппроксимировать трансцендентную функцию e^x ее многочленом Маклорена с любой желаемой точностью и что последовательное повышение степени аппроксимирующего многочлена дает и последовательное повышение точности аппроксимации.

Полагая $n = 1$, 2, 3, получим приближенные формулы

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

которые расположены в порядке возрастающей точности.

2) Вычисляем значения функции $\sin x$ и ее производных при $x = 0$:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x, & f(0) = 0, \\
f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & f'(0) = 1, \\
f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), & f''(0) = 0, \\
f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), & f'''(0) = -1, \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\
f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), & f^{(k)}(0) = \sin k\frac{\pi}{2}.
\end{array}$$

Здесь при $x = 0$ все производные четного порядка равны нулю. Поэтому аппроксимирующий эту функцию многочлен Маклорена будет содержать только *нечетные* степени x:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \pm \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \tag{2}$$

(x — радианная мера угла).

Это приближенное равенство отчетливо выражает **нечетность** функции $\sin x$, т. е. что $\sin(-x) = -\sin x$.

Погрешность этого приближенного равенства определим по общей формуле остаточного члена R_n формулы Маклорена.

Для функции $\sin x$ погрешность

$$R_{2m} = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \sin\left[\Theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \Theta < 1. \text{*}$$

Используя очевидное неравенство $|\sin \alpha| \leqslant 1$, избавимся от неизвестной величины Θ и получим простое выражение для оценки погрешности, возникающей при замене функции $\sin x$ многочленом (2)

$$|R_{2m}| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Как было доказано в задаче 40 при $n \to +\infty$ и при любом значении x величина $\frac{x^n}{n!}$ стремится к нулю. Вследствие этого при $m \to +\infty$ и остаточный член R_{2m} формулы Маклорена для функции $\sin x$ также стремится к нулю при любом значении x, т. е.

$$\lim_{m \to +\infty} R_{2m} = 0.$$

Следовательно, при любом значении x можно заменить функцию $\sin x$ ее многочленом Маклорена с любой сколь угодно малой погрешностью. При этом последовательное уменьшение погрешности достигается путем последовательного увеличения числа членов аппроксимирующего многочлена (2).

Полагая $m = 1, 2, 3$, получим простейшие приближенные выражения для $\sin x$:

$$\sin x \approx x, \qquad |R_2| \leqslant \frac{|x|^3}{3!},$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad |R_4| \leqslant \frac{|x|^5}{5!},$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \qquad |R_6| \leqslant \frac{|x|^7}{7!}.$$

Вторая из этих формул точнее первой, а третья точнее второй.

3) При $x = 0$ значения функции $\cos x$ и ее производных будут:

$$f(x) = \cos x, \qquad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0) = 0,$$

. . . .

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(k)}(0) = \cos k\frac{\pi}{2}.$$

---

* R_{2m} соответствует многочлену Маклорена $2m$-й степени, который для функции $\sin x$ тождествен многочлену $(2m-1)$-й степени.

Здесь значения всех производных нечетного порядка равны нулю. Поэтому многочлен Маклорена, аппроксимирующий функцию $\cos x$, содержит только четные степени x:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \pm \frac{x^{2m}}{(2m)!}. \tag{3}$$

Эта приближенная формула отчетливо выражает четность функции $\cos x$, т. е. что $\cos(-x) = \cos x$.

Погрешность этой приближенной формулы будет

$$R_{2m+1} = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos\left[\Theta x + (2m+2)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \Theta < 1.$$

Избавляясь от неизвестной Θ, в силу неравенства $|\cos\alpha| \leqslant 1$, получим неравенство

$$|R_{2m+1}| \leqslant \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

которое позволяет легко оценить погрешность при замене функции $\cos x$ многочленом (3).

Исследуя поведение погрешности R_{2m+1} при различных значениях x и при $m \to +\infty$, посредством таких же рассуждений, как и в двух предыдущих задачах, приходим к выводу:

При любом значении x и при $m \to +\infty$ остаточный член R_{2m+1} формулы Маклорена для функции $\cos x$ стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{m \to +\infty} R_{2m+1} = 0.$$

Из этого следует, что при любом значении x функцию $\cos x$ можно аппроксимировать ее многочленом Маклорена с любой заданной точностью, причем последовательное повышение точности аппроксимации достигается путем простого увеличения числа членов аппроксимирующего многочлена (3).

Полагая $m = 1, 2, 3$, получим простейшие приближенные формулы для $\cos x$:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad |R_3| \leqslant \frac{x^4}{4!},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \qquad |R_5| \leqslant \frac{x^6}{6!},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}, \qquad |R_7| \leqslant \frac{x^8}{8!},$$

которые расположены в порядке повышающейся точности.

298. Аппроксимировать функции: 1) x^m и 2) $\ln x$ многочленами n-й степени относительно двучлена $x-1$ и оценить погрешность. Затем, полагая $x - 1 = t$, получить разложения функций по степеням t.

Решение. Чтобы аппроксимировать данную функцию $f(x)$ многочленом относительно двучлена $x-1$, следует написать для нее многочлен Тейлора, полагая $a = 1$. Погрешность, возникающая при замене данной функции ее многочленом Тейлора, определяется величиной остаточного члена R_n формулы Тейлора.

1) Для функции x^m, где m — любое вещественное число, имеем:

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^m, && f(1) = 1,\\
&f'(x) = mx^{m-1}, && f'(1) = m,\\
&f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, && f''(1) = m(m-1),\\
&f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, && f'''(1) = m(m-1)(m-2),\\
&\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots\\
&f^{(k)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots && f^{(k)}(1) = m(m-1)(m-2)\dots\\
&\qquad\dots(m-k+1)x^{m-k}, && \qquad\dots(m-k+1).
\end{aligned}$$

Пользуясь многочленом Тейлора (*), получим

$$x^m \approx 1 + \frac{m}{1!}(x-1) + \frac{m(m-1)}{2!}(x-1)^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}(x-1)^n.$$

Погрешность этого приближенного равенства найдем по общей формуле остаточного члена R_n формулы Тейлора, полагая $f(x) = x^m$ и $a = 1$:

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}[1+\Theta(x-1)]^{m-n-1}, \ 0 < \Theta < 1.$$

Полагая $x - 1 = t$, получим

$$(1+t)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}t + \frac{m(m-1)}{2!}t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}t^n, \tag{4}$$

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}t^{n+1}(1+\Theta t)^{m-n-1}.$$

Последняя формула представляет обобщение бинома Ньютона для любого показателя m. В частности, когда показатель m — целое положительное число, то R_m обращается в нуль, а равенство (4) обращается в элементарную формулу бинома Ньютона. Если m не будет целым положительным числом, то равенство (4) дает приближенное выражение бинома в виде многочлена с биномиальными коэффициентами, которые составлены по тому же закону, что и в элементарной формуле бинома Ньютона.

Как доказывается в теории рядов, погрешность R_n биномиальной формулы (4) может быть сделана сколь угодно малой величиной, т. е. стремится к нулю с возрастанием n только для тех значений t, которые по абсолютному значению меньше единицы:

$$-1 < t < 1.$$

Полагая $n=1, 2, 3$, получим простейшие приближенные биномиальные формулы:

$$(1+t)^m \approx 1+mt,$$

$$(1+t)^m \approx 1+mt+\frac{m(m-1)}{2}t^2,$$

$$(1+t)^m \approx 1+mt+\frac{m(m-1)}{2}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{6}t^3.$$

Вторая из этих формул точнее первой, а третья точнее второй.

2) Для функции $\ln x$ получим:

$$\begin{array}{ll} f(x)=\ln x, & f(1)=0, \\ f'(x)=x^{-1}, & f'(1)=1, \\ f''(x)=-1\cdot x^{-2}, & f''(1)=-1, \\ f'''(x)=1\cdot 2\cdot x^{-3}, & f'''(1)=2! \\ f^{(4)}(x)=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}, & f^{(4)}(1)=-3! \end{array}$$

. . . .

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}, \quad f^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$\ln x \approx \frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Погрешность этой приближенной формулы

$$R_n=\frac{(-1)^n}{n+1}\left[\frac{x-1}{1+\Theta(x-1)}\right]^{n+1}, \quad 0<\Theta<1.$$

Полагая $x-1=t$, получим

$$\ln(1+t)\approx t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}; \tag{5}$$

$$R_n=\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{t}{1+\Theta t}\right)^{n+1}.$$

Здесь $R_n \to 0$ с возрастанием n при $-1<t\leqslant 1$, т. е. погрешность вычисления логарифмов по формуле (5) можно довести до любой сколь угодно малой величины только для значений t из указанного полуоткрытого интервала.

При $n=1, 2, 3$ получим приближенные формулы

$$\ln(1+t)\approx t,$$

$$\ln(1+t)\approx t-\frac{t^2}{2},$$

$$\ln(1+t)\approx t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3},$$

которые следуют в порядке возрастающей точности.

Аналогичным образом, как в задачах 297 и 298, *многие другие трансцендентные и сложные алгебраические функции можно аппроксимировать посредством формулы Тейлора простейшими алгебраическими функциями — степенными многочленами с любой* *заданной точностью*, что имеет огромное теоретическое и практическое значение.

299. Вычислить с точностью до 10^{-6} приближенное значение: 1) $\cos 5°$; 2) $\sin 49°$; 3) $\sqrt[4]{83}$; 4) $\sqrt[3]{121}$.

Решение. 1) Воспользуемся приближенной формулой для $\cos x$, полученной в решении задачи 297.

Подставляя в эту формулу радианную меру угла 5°, получим

$$\cos 5° = \cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2!\,36^2} + \frac{\pi^4}{4!\,36^4} - \ldots \pm \frac{\pi^{2n}}{(2n)!\,36^{2n}}.$$

Чтобы определить, сколько взять первых членов этой формулы для получения заданной точности вычисления, оценим величины последовательных остаточных членов R_{2m+1}:

$$|R_1| \leqslant \frac{x^2}{2!} = \frac{\pi^2}{2!\,36^2} < 0{,}004,$$

$$|R_3| \leqslant \frac{x^4}{4!} = \frac{\pi^4}{4!\,36^4} < 0{,}000003,$$

$$|R_5| \leqslant \frac{x^6}{6!} = \frac{\pi^6}{6!\,36^6} < 0{,}00000003.$$

Величина $|R_5| < 10^{-6}$. Поэтому для получения заданной точности вычисления достаточно взять три первых члена формулы, предшествующих R_5:

$$\cos 5° \approx 1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 36^2} + \frac{\pi^4}{24\cdot 36^4} \approx 1 - 0{,}0038077 + 0{,}0000024 \approx 0{,}96195.$$

Здесь для обеспечения заданной точности значения числа π и всех результатов промежуточных действий взяты с одним лишним знаком, т. е. с точностью до 10^{-7} ($\pi \approx 3{,}1415917$).

2) Чтобы вычислить $\sin 49°$, напишем формулу Тейлора для функции $\sin x$:

$$\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!}\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-a)^2}{2!}\sin\left(a + 2\frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\sin\left(a + n\frac{\pi}{2}\right) + R_n,$$

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[a + \theta(x-a) + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \theta < 1,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ так как } |\sin\alpha| \leqslant 1.$$

По этой формуле можно вычислять значения $\sin x$ при любых значениях x и a и с любой желаемой точностью, так как по мере увеличения числа членов в ней погрешность R_n неограниченно убывает, стремясь к нулю. При этом чем меньше будет величина разности $|x-a|$, тем меньше потребуется брать первых членов этой формулы для достижения какой-либо заданной точности вычисления.

Полагая $x=\frac{\pi}{180}\cdot 49$ и $a=\frac{\pi}{180}\cdot 45$, получим

$$x-a=\frac{\pi}{180}(49-45)=\frac{\pi}{45},$$

$$\sin 49^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{1!\,45}-\frac{\pi^2}{2!\,45^2}-\frac{\pi^3}{3!\,45^3}+\ldots\pm\frac{\pi^n}{n!\,45^n}\right)+R_n,$$

$$|R_n|\leqslant\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!\,45^{n+1}}.$$

Для определения числа первых членов этой формулы, обеспечивающих заданную точность вычисления, оцениваем величины последовательных остаточных членов R_n:

$$|R_1|\leqslant\frac{\pi^2}{2!\,45^2}<0{,}003,$$

$$|R_2|\leqslant\frac{\pi^3}{3!\,45^3}<0{,}00006,$$

$$|R_3|\leqslant\frac{\pi^4}{4!\,45^4}<0{,}0000009<10^{-6}.$$

Следовательно, заданная точность вычисления будет достигнута, если взять четыре первых члена формулы, предшествующих R_3:

$$\sin 49^\circ\approx\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{45}-\frac{\pi^2}{2\cdot 45^2}-\frac{\pi^3}{6\cdot 45^3}\right)\approx$$

$$\approx 0{,}7071068\,(1+0{,}0698131-0{,}0024369-0{,}0000567)\approx 0{,}754709.$$

(Значения π, $\sqrt{2}$ и всех результатов промежуточных действий взяты с одним лишним знаком, т. е. с семью десятичными знаками.)

Иначе можно было вычислить $\sin 49^\circ$ по формуле Маклорена для функции $\sin x$, однако при этом для достижения заданной точности пришлось бы взять очень много членов этой формулы.

3) Преобразуем заданный корень

$$\sqrt[4]{83}=\sqrt[4]{81+2}=3\left(1+\frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$$

и применим обобщенную формулу бинома (4), полученную в решении задачи 298.

Полагая $t=\frac{2}{81}$ и $m=\frac{1}{4}$, получим

$$\sqrt[4]{83}=3\left(1+\frac{1}{162}-\frac{1}{162\cdot 108}+\frac{7}{162\cdot 108\cdot 486}-\right.$$

$$\left.-\frac{7}{162\cdot 108\cdot 486\cdot 54}+\ldots+R_n\right).$$

Оценивая величины последовательных ошибок вычисления $3|R_n|$, находим:

$$3|R_1| < \frac{3}{162\cdot 108} < 0{,}0002,$$

$$3|R_2| < \frac{3\cdot 7}{162\cdot 108\cdot 486} < 0{,}000003,$$

$$3|R_3| < \frac{3\cdot 7}{162\cdot 108\cdot 486\cdot 54} < 0{,}00000006.$$

Следовательно, для получения заданной точности вычисления достаточно взять сумму четырех членов биномиальной формулы, которые предшествуют остатку R_3:

$$\sqrt[4]{83} \approx 3(1+0{,}0061728-0{,}0000572+0{,}0000008) \approx 3{,}018349.$$

4) Преобразуя данный корень

$$\sqrt[3]{121} = \sqrt[3]{125-4} = 5\left(1-\frac{4}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$

и подставляя в биномиальную формулу $t = -\frac{4}{125} = -0{,}032$ $m = \frac{1}{3}$, получим

$$\sqrt[3]{121} = 5\left(1-\frac{0{,}032}{3}-\frac{0{,}032^2}{9}-\frac{5\cdot 0{,}032^3}{81}-\frac{10\cdot 0{,}032^4}{243}-\ldots+R_n\right).$$

Путем последовательных испытаний величины погрешности $5|R_n|$ находим

$$5|R_3| = \frac{5\left|\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\right|}{4!}\times$$

$$\times 0{,}032^4(1-0{,}032\Theta)^{\frac{1}{3}-3-1} < 10^{-6},$$

т. е. находим, что заданная точность вычисления обеспечивается четырьмя первыми членами биномиальной формулы, предшествующими R_3:

$$\sqrt[3]{121} \approx 5(1-0{,}0106667-0{,}0001138-0{,}0000020) \approx 4{,}946088.$$

Подобным образом *с помощью формулы Тейлора можно находить числовые значения всех других* трансцендентных и сложных алгебраических *функций*. Именно таким путем составлены все таблицы числовых значений для логарифмических, показательных, тригонометрических функций, для квадратных и кубических корней и для многих других функций.

300. Для каждой из следующих функций:

1) 3^x, 2) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, 3) xe^x

найти приближенное выражение в виде многочлена n-й степени относительно x, определить возникающую при этом погрешность и установить, при каких значениях x она может быть сделана сколь угодно малой.

301. Найти приближенные выражения в виде многочленов 3-й степени относительно x для следующих функций:

1) $\operatorname{tg} x$; 2) $x \cos x$; 3) $\ln(1-x+x^2)$.

302. Аппроксимировать функции: 1) $e^{\frac{x}{a}}$ и 2) $\cos x$ многочленами n-й степени относительно двучлена $x-a$ и оценить возникающую при этом погрешность.

303. Аппроксимировать многочленами 4-й степени относительно двучлена $x-a$ функции: 1) $\sqrt[3]{x}$ при $a=-1$; 2) $\sin 3x$ при $a=-\frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg} x$ при $a=\frac{\pi}{4}$.

304. Вычислить с точностью до 0,001:

1) $\sin 18°$; 2) $\sqrt{e}$; 3) $\sqrt{70}$; 4) $\sqrt[5]{245}$.

305. Вычислить с точностью до 0,0001:

1) $\cos 10°$; 2) $\sqrt[3]{e}$; 3) $\sqrt[7]{129}$; 4) $\sin 36°$.

§ 2. Правило Лопиталя и применение его к нахождению предела функции

В задачах § 7 гл. I были разъяснены элементарные способы нахождения предела функции в тех случаях, когда аргумент неограниченно возрастает или стремится к значению, которое не входит в область определения функции. Кроме этих элементарных способов, весьма эффективным средством для нахождения предела функции в указанных особых случаях является следующее правило Лопиталя: *предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных* (если последний предел существует или равен бесконечности).

а) *Случаи нахождения предела:*

1) $\frac{0}{0}$ — когда функция представляет отношение двух бесконечно малых величин;

2) $\frac{\infty}{\infty}$ — когда функция представляет отношение двух бесконечно больших величин.

Согласно правилу Лопиталя в этих случаях можно заменять отношение величин отношением их производных, т. е. если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при $x \to a$ или $x \to \infty$, то

$$\lim \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \lim \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)}.$$