найти приближенное выражение в виде многочлена n-й степени относительно x, определить возникающую при этом погрешность и установить, при каких значениях x она может быть сделана сколь угодно малой.

301. Найти приближенные выражения в виде многочленов 3-й степени относительно x для следующих функций:

1) $\operatorname{tg} x$; 2) $x\cos x$; 3) $\ln(1-x+x^2)$.

302. Аппроксимировать функции: 1) $e^{\frac{x}{a}}$ и 2) $\cos x$ многочленами n-й степени относительно двучлена $x-a$ и оценить возникающую при этом погрешность.

303. Аппроксимировать многочленами 4-й степени относительно двучлена $x-a$ функции: 1) $\sqrt[3]{x}$ при $a=-1$; 2) $\sin 3x$ при $a=-\frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg} x$ при $a=\frac{\pi}{4}$.

304. Вычислить с точностью до 0,001:

1) $\sin 18°$; 2) $\sqrt{e}$; 3) $\sqrt{70}$; 4) $\sqrt[5]{245}$.

305. Вычислить с точностью до 0,0001:

1) $\cos 10°$; 2) $\sqrt[3]{e}$; 3) $\sqrt[7]{129}$; 4) $\sin 36°$.

§ 2. Правило Лопиталя и применение его к нахождению предела функции

В задачах § 7 гл. I были разъяснены элементарные способы нахождения предела функции в тех случаях, когда аргумент неограниченно возрастает или стремится к значению, которое не входит в область определения функции. Кроме этих элементарных способов, весьма эффективным средством для нахождения предела функции в указанных особых случаях является следующее правило Лопиталя: *предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных* (если последний предел существует или равен бесконечности).

а) Случаи нахождения предела:

1) $\frac{0}{0}$ — когда функция представляет отношение двух бесконечно малых величин;

2) $\frac{\infty}{\infty}$ — когда функция представляет отношение двух бесконечно больших величин.

Согласно правилу Лопиталя в этих случаях можно заменять отношение величин отношением их производных, т. е. если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при $x \to a$ или $x \to \infty$, то

$$\lim \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \lim \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)}.$$

Если последний предел существует или равен бесконечности, то он будет равен искомому пределу. Если же отношение производных также будет представлять случай $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то можно снова и снова применять правило Лопиталя, если это полезно, до получения результата.

Найти пределы:

306. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$; 2 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$; 3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{kx}}{x^n}$, где $k>0$, n — натуральное число;

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, применяем затем правило Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}=\lim\frac{4x^3}{3x^2+10x-6}=\frac{32}{26}=\frac{16}{13}$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}=\lim\frac{2e^{2x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\lim\frac{a\sin ax}{b\sin bx}=\lim\frac{a^2\cos ax}{b^2\cos bx}=\frac{a^2}{b^2}$.

Здесь правило Лопиталя применено дважды.

5) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{kx}}{x^n}=\lim\frac{ke^{kx}}{nx^{n-1}}=\lim\frac{k^2e^{kx}}{n(n-1)x^{n-2}}=$$
$$=\ldots=\lim\frac{k^ne^{kx}}{n!}=+\infty.$$

Здесь правило Лопиталя применено n раз.

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}=\lim\frac{\sec^2 x}{\sec x\operatorname{tg} x}=\lim\frac{\sec x}{\operatorname{tg} x}=\lim\frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}=\ldots$

Здесь применение правила Лопиталя бесполезно. Предел легко найти без этого правила путем элементарного преобразования:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}=\lim\frac{\sin x\cos x}{\cos x}=\lim\sin x=1.$$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

Здесь применение правила Лопиталя бесполезно, ибо отношение производных $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ не имеет предела при $x\to\infty$.

Искомый предел можно найти элементарным путем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1,\ \text{так как}\ |\sin x|\leqslant 1.$$

Это не противоречит теореме Лопиталя, ибо в ней утверждается лишь то, что *если отношение производных стремится к пределу, то к тому же пределу стремится и отношение функций, но не наоборот.*

307. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$.

308. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$.

309. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}$.

310. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$.

311. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}3x}$.

312. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

313. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$.

314. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg}2x}{\arcsin 5x}$.

б) *Случаи нахождения предела:*

3) $0\cdot\infty$ — когда функция представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую;

4) $\infty-\infty$ — когда функция представляет разность двух положительных бесконечно больших величин.

Эти случаи нахождения предела функции сводятся к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем преобразования функции к виду дроби.

315. Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x$; 2) $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\ln x$;

3) $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}\varphi-\sec\varphi)$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)$; 5) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)$.

Решение. Установив, что имеет место случай $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$, преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, затем применяем правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x=\lim\frac{x}{\operatorname{tg}2x}=\lim\frac{1}{2\sec^2 2x}=\frac{1}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt[3]{x}\ln x=\lim \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}=\lim \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}}=-3\lim\sqrt[3]{x}=0;$

3) $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}\varphi-\sec\varphi)=\lim\dfrac{\sin\varphi-1}{\cos\varphi}=\lim\dfrac{\cos\varphi}{-\sin\varphi}=0;$

4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)=\lim\dfrac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\dfrac{-\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=$

$$=-\lim\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=-\lim\frac{1+\ln x}{2+\ln x}=-\frac{1}{2};$$

здесь правило Лопиталя применено дважды;

5) $\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t}\right)=\lim\dfrac{t-\sin t}{t\sin t}=\lim\dfrac{1-\cos t}{\sin t+t\cos t}=$

$$=\lim\frac{\sin t}{2\cos t-t\sin t}=0;$$

здесь правило Лопиталя применено дважды.

316. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\operatorname{tg}5x.$

317. $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}-\operatorname{cosec}\dfrac{x}{3}\right).$

318. $\lim\limits_{x\to0} x^2e^{\sqrt{x}}.$

319. $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{ctg}x\cdot\ln(x+e^x).$

320. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{5}{x^5-1}-\dfrac{7}{x^7-1}\right).$

321. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x.$

322. $\lim\limits_{\varphi\to0}\left(\operatorname{ctg}\varphi-\dfrac{1}{\varphi}\right).$

323.* $\lim\limits_{t\to0}(\operatorname{cosec}^2 t-4\operatorname{cosec}^2 2t).$

в) Случаи нахождения предела:

5) 1^∞ — когда функция представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности;

6) ∞^0 — когда функция представляет степень, основание которой стремится к бесконечности, а показатель — к нулю;

7) 0^0 — когда функция представляет степень, основание и показатель которой стремятся к нулю.

Эти случаи нахождения предела функции сводятся к случаю $0\cdot\infty$ $\left(\text{а затем к случаю } \dfrac{0}{0} \text{ или } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$ следующим путем: функция логарифмируется и сначала находится предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и предел самой функции.

324. Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{m}{x^2-1}}$.

Решение. 1) Сначала устанавливаем, что имеет место случай 1^∞. Затем логарифмируем функцию и ищем предел ее логарифма:

$$a=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$\ln a=\ln\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}=\lim \operatorname{tg} 2x\cdot\ln\operatorname{tg} x=\lim\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}.$$

Здесь нахождение предела свелось к случаю $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\ln a=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}:(-2\operatorname{cosec}^2 2x)\right]=-1.$$

Теперь по найденному пределу логарифма функции находим искомый предел самой функции: $a=e^{-1}$.

2) Установив, что имеет место случай ∞^0, делаем преобразования:

$$a=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}};\quad \ln a=\lim_{x\to+\infty}\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\lim\frac{\ln(\ln x)}{x};$$

получили случай $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\ln a=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\ln x}:1\right)=0,$$

откуда следует, что искомый предел $a=e^0=1$.

3) Убедившись, что имеет место случай 0^0, преобразовываем:

$$a=\lim_{x\to+0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}};\quad \ln a=\lim_{x\to+0}\ln x^{\frac{6}{1+2\ln x}}=\lim\frac{6\ln x}{1+2\ln x};$$

получили случай $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\ln a=6\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}:\frac{2}{x}\right)=6\cdot\frac{1}{2}=3.$$

Следовательно, искомый предел $a=e^3$.

4) Установив, что имеет место случай 1^{∞}, преобразовываем:

$$a=\lim_{x\to 1} x^{\frac{m}{x^2-1}}; \quad \ln a=\lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{m}{x^2-1}}=\lim \frac{m \ln x}{x^2-1};$$

получили случай $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\ln a=m \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}:2x\right)=\frac{m}{2}.$$

Следовательно,

$$a=e^{\frac{m}{2}}=\sqrt{e^m}.$$

325. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$. **326.** $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}$.

327. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^x$. **328.** $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg} 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

329. $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\cos k\alpha)^{\frac{1}{\alpha^2}}$. **330.** $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

331. Доказать, что при $x\to 0$:

1) $e^{2x}-e^x\approx x$; 2) $x-\operatorname{arctg} x\approx\frac{x^3}{3}$;

3) $\arcsin x-x\approx\frac{x^3}{6}$; 4) $4x-\ln(4x+1)\approx 8x^2$;

5) $\sqrt[n]{1+x}-1\approx\frac{x}{n}$; 6) $e^{4x}-4x-1\approx 8x^2$.

§ 3. Возрастание и убывание функции

При изучении поведения функции в зависимости от изменения независимой переменной обычно предполагается, что во всей области определения функции независимая переменная изменяется монотонно возрастая, т. е. что каждое следующее ее значение больше предыдущего.

Если при этом последовательные значения функции также возрастают, то и функция называется возрастающей, а если они убывают, то и функция называется убывающей.

Некоторые функции во всей своей области определения изменяются монотонно—только возрастают или только убывают (например 2^x, $\operatorname{arcctg} x$).

Многие функции изменяются не монотонно. В одних интервалах изменения независимой переменной они возрастают, а в других интервалах убывают (например, $\sin x$, $\cos x$).

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ характеризуется знаком ее производной y': если в некотором интервале $y'>0$,