4) Установив, что имеет место случай 1^∞, преобразовываем:

$$a=\lim_{x\to 1} x^{\frac{m}{x^2-1}}; \quad \ln a=\lim_{x\to 1}\ln x^{\frac{m}{x^2-1}}=\lim\frac{m\ln x}{x^2-1};$$

получили случай $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\ln a=m\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}:2x\right)=\frac{m}{2}.$$

Следовательно,

$$a=e^{\frac{m}{2}}=\sqrt{e^m}.$$

325. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$. **326.** $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}$.

327. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{m}{x}\right)^x$. **328.** $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

329. $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\cos k\alpha)^{\frac{1}{\alpha^2}}$. **330.** $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

331. Доказать, что при $x\to 0$:

1) $e^{2x}-e^x\approx x$; 2) $x-\operatorname{arctg}x\approx\frac{x^3}{3}$;

3) $\arcsin x-x\approx\frac{x^3}{6}$; 4) $4x-\ln(4x+1)\approx 8x^2$;

5) $\sqrt[n]{1+x}-1\approx\frac{x}{n}$; 6) $e^{4x}-4x-1\approx 8x^2$.

§ 3. Возрастание и убывание функции

При изучении поведения функции в зависимости от изменения независимой переменной обычно предполагается, что во всей области определения функции независимая переменная изменяется монотонно возрастая, т. е. что каждое следующее ее значение больше предыдущего.

Если при этом последовательные значения функции также возрастают, то и функция называется возрастающей, а если они убывают, то и функция называется убывающей.

Некоторые функции во всей своей области определения изменяются монотонно—только возрастают или только убывают (например 2^x, $\operatorname{arcctg}x$).

Многие функции изменяются не монотонно. В одних интервалах изменения независимой переменной они возрастают, а в других интервалах убывают (например, $\sin x$, $\cos x$).

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ характеризуется знаком ее производной y': если в некотором интервале $y'>0$, *то функция возрастает, а если $y' < 0$, то функция убывает в этом интервале.**

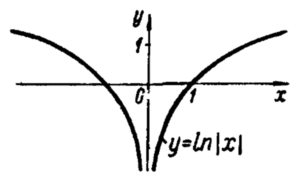
332. Определить интервалы возрастания и убывания следующих функций:

1) $p = \ln(1-x^2)$; 2) $z = x(1+2\sqrt{x})$; 3)* $y = \ln|x|$.

Решение. 1) Производная $p' = -\frac{2x}{1-x^2}$ положительна при $-1 < x < 0$ и $x > 1$ и отрицательна при $0 < x < 1$ и при $x < -1$. Учитывая, что область определения функции p есть интервал $-1 < x < 1$, заключаем: в интервале $(-1; 0)$ функция p возрастает, а в интервале $(0; 1)$ она убывает.

2) Функция z определена в полуоткрытом интервале $0 \leqslant x < +\infty$; ее производная $z' = 1+3\sqrt{x} > 0$ — во всем этом интервале. Поэтому функция z монотонная, она возрастает во всей своей области определения.

3)* Функция y определена на всей числовой оси, исключая точку $x=0$; ее производная $y' = (\ln|x|)' = \frac{|x|'}{|x|} = \pm\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$; $y' > 0$ при $x > 0$; $y' < 0$ при $x < 0$. Отсюда следует, что функция y убывает в интервале $(-\infty; 0)$ и возрастает в интервале $(0; +\infty)$. График этой четной функции приведен на черт. 43.



Черт. 43

333. Исследовать на возрастание и убывание следующие функции:

1) $y = x^3+3x^2+3x$; 2) $y = x^3-3x+5$; 3) $y = e^{kx}$;
4) $y = \sqrt{(x^2-9)^3}$; 5) $y = \cos x - x$; 6)* $y = x|x|$.

§ 4. Максимум и минимум (экстремум) функции

Значение функции $f(x)$ в точке x_0 называется максимумом (минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от x_0.

Функция может иметь экстремум (максимум или минимум) *только в тех точках, которые лежат внутри области определения функции и где ее производная равна нулю или не существует*** Такие точки называются **критическими**. В соответствующих точках графика функции касательная параллельна

---

* В интервале возрастания (убывания) функции могут быть отдельные точки, в которых $y' = 0$.

** Это необходимые условия экстремума, но недостаточные; они могут выполняться и в точках, где нет экстремума, например в точках x_2, x_5, x_7, черт. 44.