*то функция возрастает, а если $y' < 0$, то функция убывает в этом интервале.**

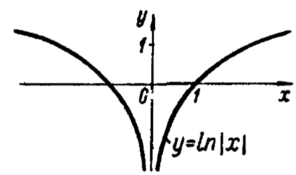
332. Определить интервалы возрастания и убывания следующих функций:

1) $p = \ln(1-x^2)$; 2) $z = x(1+2\sqrt{x})$; 3)* $y = \ln|x|$.

Решение. 1) Производная $p' = -\frac{2x}{1-x^2}$ положительна при $-1 < x < 0$ и $x > 1$ и отрицательна при $0 < x < 1$ и при $x < -1$. Учитывая, что область определения функции p есть интервал $-1 < x < 1$, заключаем: в интервале $(-1; 0)$ функция p возрастает, а в интервале $(0; 1)$ она убывает.

2) Функция z определена в полуоткрытом интервале $0 \leqslant x < +\infty$; ее производная $z' = 1 + 3\sqrt{x} > 0$ — во всем этом интервале. Поэтому функция z монотонная, она возрастает во всей своей области определения.

3)* Функция y определена на всей числовой оси, исключая точку $x=0$; ее производная $y' = (\ln|x|)' = \frac{|x|'}{|x|} = \pm\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$; $y' > 0$ при $x > 0$; $y' < 0$ при $x < 0$. Отсюда следует, что функция y убывает в интервале $(-\infty; 0)$ и возрастает в интервале $(0; +\infty)$. График этой четной функции приведен на черт. 43.



Черт. 43

333. Исследовать на возрастание и убывание следующие функции:

1) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$; 2) $y = x^3 - 3x + 5$; 3) $y = e^{kx}$;
4) $y = \sqrt{(x^2-9)^3}$; 5) $y = \cos x - x$; 6)* $y = x|x|$.

§ 4. Максимум и минимум (экстремум) функции

Значение функции $f(x)$ в точке x_0 называется максимумом (минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от x_0.

Функция может иметь экстремум (максимум или минимум) *только в тех точках, которые лежат внутри области определения функции и где ее производная равна нулю или не существует*** Такие точки называются **критическими**. В соответствующих точках графика функции касательная параллельна

---

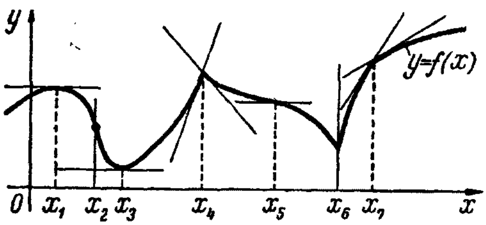
* В интервале возрастания (убывания) функции могут быть отдельные точки, в которых $y' = 0$.

** Это необходимые условия экстремума, но недостаточные; они могут выполняться и в точках, где нет экстремума, например в точках x_2, x_5, x_7, черт. 44.

оси абсцисс ($y'=0$), или оси ординат ($y'=\infty$) или нет определенной касательной (например, как в угловой точке).

На графике функции (черт. 44) отчетливо видно, что *точками экстремума являются все точки, где функция меняет свое поведение и непрерывна.*

Точки x_1 и x_4, при переходе через которые аргумента x возрастание функции сменяется на убывание, являются точками максимума, а точки x_3 и x_6, при переходе через которые аргумента x убывание функции сменяется на возрастание, являются точками минимума.



Черт. 44

Поскольку поведение функции характеризуется знаком ее производной, то *функция будет иметь экстремум в тех точках, где ее производная меняет свой знак, а сама функция непрерывна**.

Отсюда вытекает следующее правило исследования функции на экстремум.

Чтобы найти точки экстремума функции $y=f(x)$, в которых она непрерывна, нужно:

I. Найти производную y' и критические точки, в которых $y'=0$ или не существует, а сама функция непрерывна, и которые лежат внутри области определения функции.

IIa. Определить знак y' слева и справа от каждой критической точки.

Если при переходе аргумента x через критическую точку x_0:

1) y' меняет знак с $+$ на $-$, то x_0 есть точка максимума;

2) y' меняет знак с $-$ на $+$, то x_0 есть точка минимума;

3) y' не меняет знака, то в точке x_0 нет экстремума.

Иногда проще исследовать критические точки, где $y'=0$, по знаку второй производной, — вместо правила IIa можно пользоваться следующим правилом:

IIб. Найти вторую производную y'' и определить ее знак в каждой критической точке.

---

* Это достаточные условия экстремума (если они выполнены в какой-либо точке, то она обязательно будет точкой экстремума).

Если в критической точке x_0, где $y' = 0$:

1) $y'' > 0$, то x_0 есть точка минимума;

2) $y'' < 0$, то x_0 есть точка максимума;

3) $y'' = 0$, то вопрос о наличии экстремума в точке x_0 остается открытым. Такую критическую точку, как и всякую другую, можно исследовать по правилу IIа.

Далее следует найти экстремумы функции, т. е. вычислить значения функции в найденных точках экстремума.

При исследовании на экстремум некоторых типов функций возможны существенные упрощения. Например, если функция представляет дробь с постоянным числителем или корень с целым положительным показателем.

Характер упрощений, возможных при исследовании на экстремум указанных функций, разъясняется в решении задачи 335.

334. *Исследовать на максимум и минимум функции:*

1) $y=(1-x^2)^3$; 2) $u=x\sqrt{1-x^2}$;

3) $v=2\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^2}+1$; 4) $p=x^3-12x$;

5) $q=x^2+\sqrt{x^5}$; 6) $r=\sin^2 x$;

7)* $s=1+|\operatorname{arctg}(x-1)|$.

Решение. 1) Согласно правилу исследования функции на экстремум:

I. Находим производную: $y'=3(1-x^2)^2(-2x)=-6x(1-x^2)^2$ и критические точки. Полагая $y'=0$, получим $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$. Функция y определена и непрерывна на всей числовой оси. Поэтому точки x_1, x_2 и x_3 являются критическими.

Других критических точек нет, так как производная y' существует всюду.

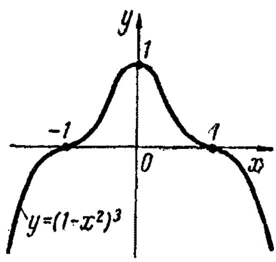
II. Исследуем критические точки, определяя знак y' слева и справа от каждой этой точки (по правилу IIа). Для сокращения вычислений и для наглядности это исследование удобно записать в виде следующей таблицы:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
y	возр.	нет экстр.	возр.	$\frown$ max	убыв.	нет экстр.	убыв.

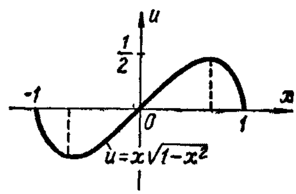
В первой строке помещены все критические точки в порядке расположения их на числовой оси; между ними вставлены промежуточные точки, расположенные слева и справа от критических точек. Во второй строке помещены знаки производной в указанных промежуточных точках, т. е. знаки $y'(-2)$, $y'\left(-\frac{1}{2}\right)$,

$y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и $y'(2)$. В третьей строке — заключение о поведении функции. Исследуемая функция имеет одну точку экстремума — точку максимума $x=0$, где $y_{\max}=y(0)=1$. До этой точки в интервале $(-\infty, 0)$ функция неизменно возрастает, а после нее в интервале $(0; +\infty)$ она неизменно убывает (черт. 45).

2) I. Ищем критические точки. Производная $u'=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ обращается в нуль при $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ и не существует (разрывна) при $x_{3,4}=\pm 1$. Однако критическими точками являются только точки x_1 и x_2: они лежат внутри области определения функции u,



Черт. 45



Черт. 46

которая представляет отрезок $[-1; 1]$, и в них эта функция непрерывна. Точки x_3 и x_4 не являются критическими, так как они лежат не внутри области определения функции u, а на ее границах.

II. Исследуем критические точки по знаку производной u' в соседних с ними точках. Составим следующую таблицу:

x	$-0{,}9$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$0{,}9$
u'	$-$	0	$+$	0	$-$
u	убыв.	min	возр.	max	убыв.

Согласно этой таблице функция u имеет две точки экстремума: точку минимума $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, где $u_{\min}=u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$, и точку максимума $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, где $u_{\max}=u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$ (черт. 46).

3). I. Находим производную

$$v'=2\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-5\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$$

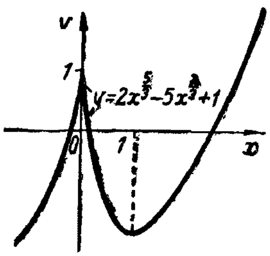
и критические точки: $v' = 0$ при $x = 1$; v' не существует (равна ∞) при $x = 0$. Функция v определена и непрерывна на всей числовой оси. Поэтому обе найденные точки являются критическими.

II. Исследуем критические точки по знаку производной v' в соседних с ними точках. Составим таблицу:

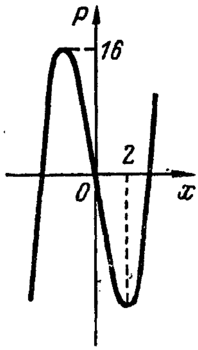
x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
v'	$+$	∞	$-$	0	$+$
v	возр.	max	убыв.	min	возр.

Из таблицы следует, что функция v имеет две точки экстремума: точку максимума $x = 0$, где $v_{\max} = v(0) = 1$, и точку минимума $x = 1$, где $v_{\min} = v(1) = -2$ (черт. 47).

4) I. Найдем критические точки. Производная $p' = 3x^2 - 12$ равна нулю в точках $x = \pm 2$. Эти точки являются критическими, так как функция p определена и непрерывна на всей числовой оси. Производная p' существует всюду. Поэтому других критических точек функция p не имеет.



Черт. 47



Черт. 48

II. Исследуем критические точки по знаку второй производной p'' в самих этих точках (по правилу II б): $p'' = 6x$; $p''(-2) = -12 < 0$, следовательно, критическая точка $x = -2$ есть точка максимума, где $p_{\max} = p(-2) = 16$; $p''(2) = 12 > 0$, поэтому критическая точка $x = 2$ есть точка минимума, где $p_{\min} = p(2) = -16$ (черт. 48).

5) I. Ищем производную $q' = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} + 2x$ и критические точки: q' обращается в нуль в точке $x = 0$. В этой точке функция q непрерывна, но она не лежит внутри области определения функции q, которая представляет интервал $0 \leqslant x < +\infty$. Поэтому точка $x = 0$ не является критической; q' не обращается в нуль в других точках и существует во всей области определения

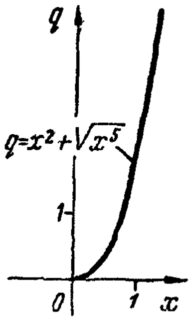
функции. Поэтому функция q, как не имеющая ни одной критической точки, не имеет экстремума. Во всей своей области определения она неизменно (монотонно) возрастает, ибо $q' \geqslant 0$ во всей этой области (черт. 49).

Если не учесть, что точка $x=0$ не лежит внутри области определения функции q, то, применяя правило IIб, $q''=\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}+2$, $q''(0)=2>0$, приходим к ошибочному заключению, что в этой точке функция q имеет минимум.

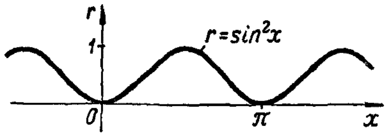
6) I. Находим критические точки: $r'=2\sin x\cos x=\sin 2x$; $r'=0$ при $x_k=\frac{k\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Все точки x_k являются критическими, так как функция r определена и непрерывна на всей числовой оси; r' существует всюду, поэтому других критических точек нет.

II. Исследуем критические точки по знаку второй производной в самих этих точках: $r''=2\cos 2x$; $r''(x_k)=$



Черт. 49



Черт. 50

$=2\cos k\pi$. При четном k, $r''(x_k)=2>0$, точки x_k являются точками минимума, где $r_{\min}=0$; при нечетном k, $r''(x_k)=-2<0$, точки x_k являются точками максимума, где $r_{\max}=1$ (черт. 50).

Здесь оказалось, что у функции r максимумы и минимумы строго чередуются. То же будет и у любой непрерывной функции, имеющей несколько экстремумов.

7)* I. Находим критические точки: $s'=\pm\frac{1}{1+(x-1)^2}$, где знак плюс соответствует интервалу $1<x<+\infty$, а минус — интервалу $-\infty<x<1$. Производная s' нигде не обращается в нуль и существует всюду, кроме точки $x=1$. Эта точка является критической, так как функция s определена и непрерывна на всей числовой оси.

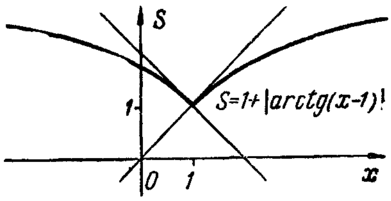
x	0	1	2
s'	—	не сущ.	+
s	убыв.	Y min	возр.

II. Исследуем критическую точку $x=1$ по знаку производной s' слева и справа от этой точки. Составив таблицу, заключаем, что $x=1$ есть точка минимума, где $s_{\min}=s(1)=1$. На графике функции (черт. 51) это будет угловая точка с двумя различными односторонними касательными, угловые коэффициенты которых равны -1 и $+1$.

335*. Найти экстремумы функций:

1) $y=\dfrac{30}{12-36x^2+20x^3-3x^4}$;

2) $u=\sqrt{e^{x^2}-1}$.



Черт. 51

1) *Дробь с постоянным положительным числителем имеет экстремумы в тех же точках, что и ее знаменатель, но они будут противоположного смысла: там, где знаменатель имеет максимум, эта дробь имеет минимум, и наоборот.* (Из этого общего положения исключается случай, когда экстремум знаменателя равен нулю.)

Используя это свойство, найдем точки экстремума знаменателя, т. е. вспомогательной функции $y_1=12-36x^2+20x^3-3x^4$.

I. Найдем критические точки. $y_1'=-72x+60x^2-12x^3$; $y_1'=0$ в точках $x=0$, $x=2$ и $x=3$. Все они являются критическими, поскольку функция y_1 определена и непрерывна на всей числовой оси. Других критических точек нет, ибо производная y_1' всюду существует.

II. Исследуем критические точки по знаку второй производной в самих этих точках (по правилу IIб); $y_1''=-72+120x-36x^2$; $y_1''(0)=-72<0$, следовательно, критическая точка $x=0$ есть точка максимума; $y_1''(2)>0$, следовательно, точка $x=2$ есть точка минимума; $y_1''(3)<0$, следовательно, точка $x=3$ есть точка максимума функции y_1.

Для заданной функции y найденные точки экстремума функции y_1 будут иметь противоположный смысл: для функции y точка $x=0$ есть точка минимума, где $y_{\min}=y(0)=2{,}5$; $x=2$ есть точка максимума, где $y_{\max}=y(2)=-1{,}5$; $x=3$ есть точка минимума, где $y_{\min}=y(3)=-2$.

2) *Точки экстремума сложной функции $y=\sqrt[n]{\varphi(x)}$, при целом положительном n, совпадают с точками экстремума подкоренной функции $\varphi(x)$, лежащими внутри области определения функции y.*

Воспользуемся этим свойством и найдем точки экстремума подкоренной функции $u_1=e^{x^2}-1$.

I. Ищем критические точки: $u_1'=2xe^{x^2}$, $u_1'=0$ в точке $x=0$, которая является критической, так как функция u_1 определена и непрерывна на всей числовой оси. Производная u_1' существует всюду, поэтому других критических точек функция u_1 не имеет.

II. Исследуем критическую точку $x=0$ по знаку второй производной в этой точке. $u_1''=2e^{x^2}(1+2x^2)$; $u_1''(0)=2>0$, поэтому точка $x=0$ есть точка минимума функции u_1.

Согласно указанному здесь свойству точка $x=0$, как лежащая внутри области определения функции u, будет также точкой минимума и для функции u. При $x=0$, $u_{min}=0$.

Без использования указанного свойства решение этой задачи было бы затруднительно. (Найденная точка является угловой точкой графика функции u, где u' не существует.)

Исследовать на экстремум следующие функции:

336. $y=x^2(x-6)$. **337.** $y=3-2x^2-x^4$.

338. $y=x^3-3x^2+3x$. **339.** $y=\frac{4x}{x^2+4}$.

340. $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}$. **341.** $y=3-2\sqrt[3]{x^2}$.

342*. $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$. **343*.** $y=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$.

344. $y=e^{-x}+e^{2x}$. **345.** $y=3x+\operatorname{tg} x$.

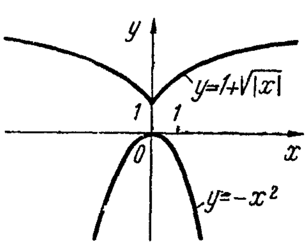
346. $y=x^2e^{-x}$. **347.** $y=\frac{x}{\ln x}$.

348. $y=\sin x+\cos x$. **349*.** $y=|x^3-3x^2|$.

§ 5. Наибольшее и наименьшее значения функции

Наибольшим значением функции называется самое большее, а наименьшим значением — самое меньшее из всех ее значений.

Функция может иметь только одно наибольшее значение и только одно наименьшее значение или может не иметь их совсем. Например, во всей своей области определения функция $\sin x$ имеет наибольшее значение, равное единице, и наименьшее значение, равное минус единице; функции $\operatorname{tg} x$ и x^3 не имеют ни наибольшего, ни наименьшего значений; функция $-x^2$ имеет наибольшее значение, равное нулю, но не имеет наименьшего значения; функция $1+\sqrt{|x|}$ имеет наименьшее значение, равное единице, но не имеет наибольшего значения (черт. 52).



Черт. 52

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывных функций основывается на следующих свойствах этих функций: