вует всюду, поэтому других критических точек функция u_1 не имеет.

II. Исследуем критическую точку $x=0$ по знаку второй производной в этой точке. $u_1''=2e^{x^2}(1+2x^2)$; $u_1''(0)=2>0$, поэтому точка $x=0$ есть точка минимума функции u_1.

Согласно указанному здесь свойству точка $x=0$, как лежащая внутри области определения функции u, будет также точкой минимума и для функции u. При $x=0$, $u_{min}=0$.

Без использования указанного свойства решение этой задачи было бы затруднительно. (Найденная точка является угловой точкой графика функции u, где u' не существует.)

Исследовать на экстремум следующие функции:

336. $y=x^2(x-6)$.

337. $y=3-2x^2-x^4$.

338. $y=x^3-3x^2+3x$.

339. $y=\frac{4x}{x^2+4}$.

340. $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}$.

341. $y=3-2\sqrt[3]{x^2}$.

342*. $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

343*. $y=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$.

344. $y=e^{-x}+e^{2x}$.

345. $y=3x+\operatorname{tg}x$.

346. $y=x^2e^{-x}$.

347. $y=\frac{x}{\ln x}$.

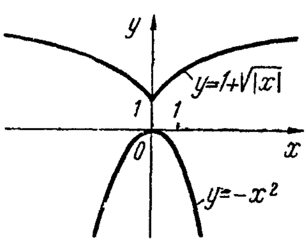
348. $y=\sin x+\cos x$.

349*. $y=|x^3-3x^2|$.

§ 5. Наибольшее и наименьшее значения функции

Наибольшим значением функции называется самое большее, а наименьшим значением — самое меньшее из всех ее значений.

Функция может иметь только о д н о наибольшее значение и только о д н о наименьшее значение или может не иметь их совсем. Например, во всей своей области определения функция $\sin x$ имеет наибольшее значение, равное единице, и наименьшее значение, равное минус единице; функции $\operatorname{tg}x$ и x^3 не имеют ни наибольшего, ни наименьшего значений; функция $-x^2$ имеет наибольшее значение, равное нулю, но не имеет наименьшего значения; функция $1+\sqrt{|x|}$ имеет наименьшее значение, равное единице, но не имеет наибольшего значения (черт. 52).



Черт. 52

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывных функций основывается на следующих свойствах этих функций:

1) *Если в некотором интервале (конечном или бесконечном) функция $f(x)$ непрерывна и имеет только один экстремум и если это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции в этом интервале.*

2) *Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$, то она обязательно имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри отрезка, или на границах этого отрезка.*

Отсюда вытекает практическое правило для нахождения наибольшего или наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, где она непрерывна:

I. Найти критические точки, лежащие внутри отрезка $[a, b]$, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида).

II. Вычислить значения функций на концах отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$.

III. Сравнить полученные значения функции: самое большее из них будет наибольшим значением, а самое меньшее — наименьшим значением функции на всем данном отрезке.

350. Найти наибольшее и наименьшее значения каждой из следующих функций:

1) $u = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на отрезке $[-4; 4]$;

2) $p = x^2 \ln x$ на отрезке $[1, e]$;

3) $r = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$;

4) $y = \operatorname{arc\,tg} x^2$.

Решение. Согласно практическому правилу:

1) I. Найдем критические точки функции u, лежащие внутри отрезка $[-4; 4]$, и вычислим ее значения в этих точках: $u' = 3x^2 - 6x - 9$; $u' = 0$ в точках $x = -1$ и $x = 3$. Эти точки лежат внутри отрезка $[-4; 4]$ и являются критическими. Других критических точек нет, так как производная u' существует всюду. Значения функции u в критических точках: $u(-1) = 40$; $u(3) = 8$.

II. Вычислим значения функции на концах отрезка $[-4; 4]$: $u(-4) = -41$; $u(4) = 15$.

III. Сравнивая все вычисленные значения функции во внутренних критических точках и на концах отрезка, заключаем: наибольшее значение функции u на отрезке $[-4; 4]$ равно 40 и достигается ею во внутренней критической точке $x = -1$, а ее наименьшее значение равно -41 и достигается на левой границе отрезка $x = -4$ (черт. 53).

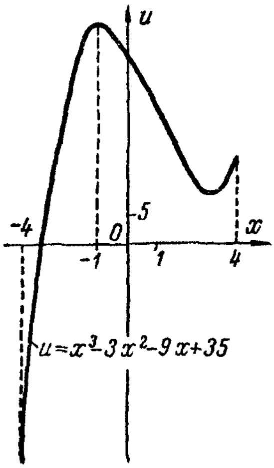
2) I. Ищем критические точки: $p' = x(1 + 2\ln x)$; $p' = 0$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = e^{-\frac{1}{2}}$. Точка x_1 лежит вне области определения данной функции $0 < x < +\infty$; точка x_2 лежит вне заданного

отрезка $[1; e]$. Производная p' существует во всем интервале определения функции p. Поэтому внутри заданного отрезка нет критических точек.

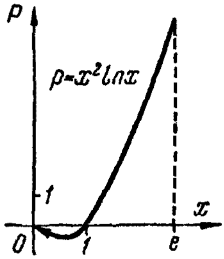
II. Вычислим значения функции p на концах отрезка: $p(1) = 0$; $p(e) = e^2$.

III. Поскольку внутри отрезка $[1, e]$ нет критических точек, то функция изменяется на этом отрезке монотонно и ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке достигаются на концах отрезка: $p_{нм} = p(1) = 0$, $p_{нб} = p(e) = e^2$ (черт. 54).

3) I. Найдем критические точки: $r' = 2\cos x + 2\cos 2x = 2 \cdot 2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x$; $r' = 0$ при $\cos\frac{3x}{2} = 0$ и $\cos\frac{x}{2} = 0$; корни первого уравнения $x_k = \frac{\pi}{3}(2k+1)$, корни второго уравнения $x_k = \pi(2k+1)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Черт. 53



Черт. 54

Из них внутри заданного отрезка $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$ лежат критические точки $x_{\text{I}} = \frac{\pi}{3}$ и $x_{\text{II}} = \pi$. Производная r' существует всюду, поэтому других критических точек функция r не имеет. Значения функции в найденных внутренних критических точках x_{I} и x_{II}:

$$r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}; \quad r(\pi) = 0.$$

II. Вычислим значения функции на концах отрезка: $r(0) = 0$; $r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

III. Сравнение вычисленных значений функции во внутренних критических точках и на концах отрезка показывает, что ее наибольшее значение на этом отрезке $r_{нб} = r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, а наименьшее значение $r_{нм} = r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

4) Здесь изменение аргумента x не ограничено каким-либо отрезком, а функция определена на всей числовой оси. Поэтому следует рассмотреть все значения функции, принимаемые ею при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$.

I. Найдем критические точки: $y'=\frac{2x}{1+x^4}$; $y'=0$ в точке $x=0$. Эта точка является критической, так как функция всюду определена и непрерывна. Других критических точек нет, так как производная y' существует всюду.

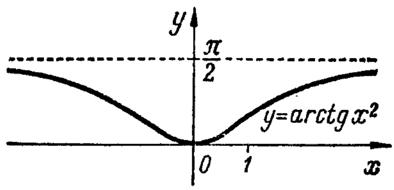
II. Исследуем критическую точку $x=0$ по знаку первой производной слева и справа от этой точки (см. табл.). Это исследование показывает, что точка $x=0$ есть точка минимума, где $y_{\min}=0$.

III. Основываясь на указанном выше свойстве 1 непрерывных функций, заключаем: функция y, как имеющая единственный экстремум — минимум и не имеющая точек разрыва, имеет наименьшее значение, совпадающее с ее минимумом,

$$y_{нм}=y_{\min}=0,$$

но не имеет наибольшего значения, хотя она не растет неограниченно. При $x\to\pm\infty$ она асимптотически приближается к значению $\frac{\pi}{2}$ (черт. 55).

x	-1	0	1
y'	$-$	0	$+$
y	убыв	$\widetilde{\min}$	возр



Черт. 55

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

351. $y=x^3-9x^2+24x-10$ на отрезке $[0;\ 3]$.

352. $u=x-2\ln x$ на отрезке $[1;\ e]$.

353. $v=2\sin x+\cos 2x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

354. $y=e^{-x^2}$. **355.** $y=\sqrt[3]{x^2}-1$.

§ 6. Задачи о наибольших или наименьших значениях величин

Во многих геометрических, физических и технических задачах требуется найти наибольшее или наименьшее значение величины, связанной функциональной зависимостью с другой величиной.