4) Здесь изменение аргумента x не ограничено каким-либо отрезком, а функция определена на всей числовой оси. Поэтому следует рассмотреть все значения функции, принимаемые ею при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$.

I. Найдем критические точки: $y'=\frac{2x}{1+x^4}$; $y'=0$ в точке $x=0$. Эта точка является критической, так как функция всюду определена и непрерывна. Других критических точек нет, так как производная y' существует всюду.

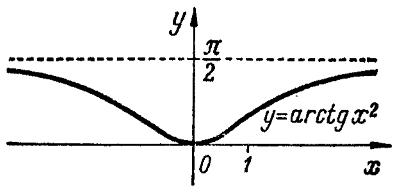
II. Исследуем критическую точку $x=0$ по знаку первой производной слева и справа от этой точки (см. табл.). Это исследование показывает, что точка $x=0$ есть точка минимума, где $y_{\min}=0$.

III. Основываясь на указанном выше свойстве 1 непрерывных функций, заключаем: функция y, как имеющая единственный экстремум — минимум и не имеющая точек разрыва, имеет наименьшее значение, совпадающее с ее минимумом,

$$y_{нм}=y_{\min}=0,$$

но не имеет наибольшего значения, хотя она не растет неограниченно. При $x\to\pm\infty$ она асимптотически приближается к значению $\frac{\pi}{2}$ (черт. 55).

x	-1	0	1
y'	$-$	0	$+$
y	убыв	min	возр



Черт. 55

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

351. $y=x^3-9x^2+24x-10$ на отрезке $[0;\ 3]$.

352. $u=x-2\ln x$ на отрезке $[1;\ e]$.

353. $v=2\sin x+\cos 2x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

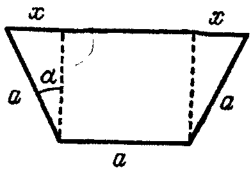
354. $y=e^{-x^2}$. **355.** $y=\sqrt[3]{x^2}-1$.

§ 6. Задачи о наибольших или наименьших значениях величин

Во многих геометрических, физических и технических задачах требуется найти наибольшее или наименьшее значение величины, связанной функциональной зависимостью с другой величиной.

Широкая распространенность и большое значение этих задач послужили одним из главных поводов к развитию математического анализа.

Для решения такой задачи следует, исходя из ее условия, выбрать независимую переменную и выразить исследуемую величину через эту переменную, а затем найти искомое наибольшее *или наименьшее значение полученной функции. При этом* интервал изменения независимой переменной, который может быть конечным или бесконечным, также определяется из условия задачи.



Черт. 56

356. Из трех одинаковых тонких досок изготовить желоб с наибольшим поперечным сечением.

Решение. Поперечное сечение желоба будет представлять равнобочную трапецию (черт. 56), площадь которой s зависит от наклона боковых сторон. Выберем за независимую переменную угол α между боковой стороной и высотой трапеции и выразим через эту переменную исследуемую площадь s:

$$x = a\sin\alpha,\quad h = a\cos\alpha \text{ и } s = h(a+x)$$

или

$$s = a^2(1+\sin\alpha)\cos\alpha,$$

где по смыслу задачи α может изменяться на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Далее найдем наибольшее значение функции $s(\alpha)$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдем критические точки функции s, лежащие внутри этого отрезка:

$$s' = a^2[\cos^2\alpha - (1+\sin\alpha)\sin\alpha] = a^2(1-\sin\alpha-2\sin^2\alpha).$$

Приравнивая производную s' нулю, получим уравнение:

$$2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0,$$

решая которое, как квадратное, найдем

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \text{ и } \sin\alpha = -1.$$

Из всех точек α, определяемых этими двумя уравнениями, внутри отрезка $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ лежит только одна точка $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Эта точка является критической, в ней выполняются все необходимые для этого условия. Производная s' существует всюду, поэтому других критических точек нет.

Вычислим значения функции s в найденной внутренней критической точке и на концах отрезка $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$:

$$s\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \approx 1{,}28a^2;\quad s(0) = a^2;\quad s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Сравнивая эти значения, заключаем: наибольшее значение функции s на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ достигается во внутренней точке $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Таким образом, желоб из трех одинаковых досок будет иметь наибольшее поперечное сечение, когда это сечение представляет равнобочную трапецию, верхнее основание которой вдвое больше нижнего.

357. Найти размеры цилиндрической закрытой цистерны с заданным объемом v и с наименьшей полной поверхностью.

Решение. Обозначив радиус и высоту цилиндра через r и h, а его полную поверхность через s, получим

$$s = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Здесь переменные r и h не являются независимыми, а связаны между собой равенством $v = \pi r^2 h$, так как согласно условию цилиндр должен иметь заданный объем v. Определяя из этого равенства h и подставляя в выражение полной поверхности, получим

$$s = 2\left(\pi r^2 + \frac{v}{r}\right),$$

где r изменяется в интервале $0 < r < +\infty$.

Выразив таким образом исследуемую полную поверхность цилиндра s через одну переменную r, найдем теперь ее наименьшее значение при изменении r в интервале $(0; +\infty)$.

Найдем критические точки; $s' = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right) = 2\frac{2\pi r^3 - v}{r^2}$; $s' = 0$ в единственной точке $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, которая лежит в рассматриваемом интервале. Эта точка является критической, так как в ней выполняются все необходимые для этого условия. Других критических точек в интервале $(0; +\infty)$ функция s не имеет, так как ее производная s' существует во всем этом интервале.

Исследуем найденную критическую точку по знаку второй производной в этой точке:

$$s'' = 4\left(\pi + \frac{v}{r^3}\right); \; s''\left(\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}\right) = 12\pi > 0,$$

откуда следует, что критическая точка $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ есть точка минимума.

Функция $s(r)$ непрерывна в интервале $(0; +\infty)$. Поэтому согласно свойству 1 непрерывных функций единственный минимум функции s в интервале $(0; +\infty)$ совпадает с ее наименьшим значением в этом интервале.

При $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ получим $h = \frac{v}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r$.

Следовательно, цилиндрическая закрытая цистерна, имеющая любой заданный объем, будет иметь наименьшую полную поверхность, когда ее осевое сечение представляет квадрат.

358. Из куска жести, форма и размеры которого (в *дм*) показаны на черт. 57, вырезать прямоугольник с наибольшей площадью.

Решение. Обозначим стороны вырезаемого прямоугольника через x и y. Тогда его площадь $S=xy$. Выразим y через x, исходя из подобия треугольников BDC и AEC:

$$BD=11-x;\quad DC=y-6;\quad AE=8;\quad EC=4.$$

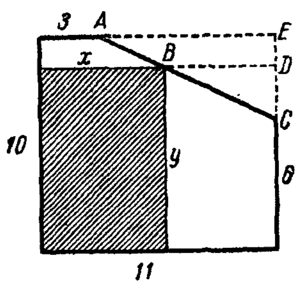
Подставляя в пропорцию $\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{EC}$, получим $\frac{11-x}{y-6}=\frac{8}{4}$, откуда $y=\frac{23-x}{2}$. Заменяя y в выражении площади, имеем

$$S=\frac{1}{2}(23x-x^2),$$

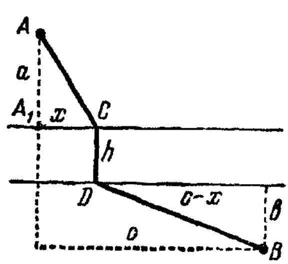
где x согласно условию задачи изменяется на отрезке $[3;\ 11]$.

Ищем далее наибольшее значение функции $S(x)$ на указанном отрезке. $S'=\frac{1}{2}(23-2x)$; $S'=0$ в точке $x=\frac{23}{2}$, но эта точка лежит вне рассматриваемого отрезка; S' существует всюду, поэтому на отрезке $[3;\ 11]$ нет ни одной критической точки. При изменении x от 3 до 11 производная $S'>0$, а функция S неизменно возрастает и достигает наибольшего значения на правом конце отрезка $x=11$.

Итак, прямоугольник, вырезанный из данного куска жести, будет иметь наибольшую площадь, когда точка B совпадает с точкой C; $S_{нб}=S(11)=66$ *дм*^{2}.



Черт. 57



Черт. 58

359. Выбрать место для постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая.

Решение. Сделаем схематический план местности вблизи указанных в условии объектов (черт. 58). Расстояния a, b, c и h

согласно условию задачи являются постоянными. Если мост построен в указанном в плане месте, то длина дороги между пунктами A и B

$$l = AC + h + DB.$$

Выбрав за независимую переменную x расстояние A_1C, получим

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad DB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

и

$$l = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (x - c)^2},$$

где x изменяется на отрезке $[0; c]$, что очевидно.

Теперь найдем наименьшее значение функции $l(x)$ на отрезке $[0; c]$.

Найдем производную l' и критические точки, лежащие внутри отрезка $[0; c]$:

$$l' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x - c}{\sqrt{b^2 + (x - c)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2 + (x - c)^2} + (x - c)\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{(a^2 + x^2)[b^2 + (x - c^2)]}};$$

$$l' = 0, \text{ когда } x\sqrt{b^2 + (x - c)^2} + (x - c)\sqrt{a^2 + x^2} = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$x^2 [b^2 + (x - c)^2] = (x - c)^2 (a^2 + x^2); \quad b^2x^2 = a^2 (x - c)^2;$$

$$x_1 = \frac{ac}{a - b} \text{ и } x_2 = \frac{ac}{a + b}.$$

Точка x_1 лежит вне отрезка $0 \leqslant x \leqslant c$: при $a > b$, $x_1 > c$; при $a < b$, $x_1 < 0$. Точка x_2 лежит внутри этого отрезка при любых положительных значениях a, b и c, так как при этом $x_2 > 0$ и $\frac{a}{a+b} < 1$, т. е. $x_2 < c$.

x	0	x_2	c
l'	$-$	0	$+$
l	убыв	min	возр.

Производная l' существует всюду, поэтому функция l других критических точек не имеет.

Внутри отрезка $[0; c]$ функция l имеет одну критическую точку x_2. Исследуя эту критическую точку по знаку производной l' слева и справа от нее, как это показано в таблице, убеждаемся, что точка x_2 есть точка минимума.

Согласно свойству 1 непрерывных функций, в этой единственной на отрезке $[0; c]$ точке минимума непрерывная функция l имеет и наименьшее значение из всех ее значений на этом отрезке.

Следовательно, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая, следует построить мост в том месте, где расстояние $A_1C = \frac{ac}{a+b}$.

360. Из куска проволоки длиной l согнуть прямоугольник, чтобы его площадь была наибольшей.

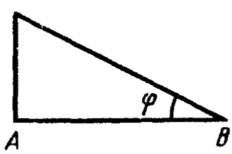
361. Одна сторона прямоугольного участка земли примыкает к берегу канала, а три другие огораживаются забором. Каковы должны быть размеры этого участка, чтобы его площадь равнялась 800 *м*^{2}, а длина забора была наименьшая?

362. В прямоугольном листе картона длиной 48 *см* и шириной 30 *см* вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается открытая прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объем коробки был наибольшим?

363. На прямой между двумя источниками света силы F и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками 24 *м*. (Освещенность точки обратно пропорциональна расстоянию ее от источника света.)

364. Из данного круга вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить конус с наибольшим объемом.

365. Завод A расположен на расстоянии a *км* от железной дороги, идущей в город B, и на расстоянии b *км* от города B. Под каким углом к железной дороге следует провести шоссе с завода A, чтобы доставка грузов из A в B была наиболее дешевой, если стоимость перевозок по шоссе в k раз дороже, чем по железной дороге?



Черт. 59

366. Керосиновая цистерна, имеющая форму цилиндра, завершенного конусом, должна быть построена на данном круглом фундаменте и должна иметь заданный объем. Показать, что количество материала для постройки цистерны потребуется наименьшее, если угол при вершине осевого сечения конуса будет равен $2 \arccos \frac{2}{3} \approx 96°$.

367. Водный канал должен иметь заданную глубину и заданную площадь поперечного сечения. Если поперечное сечение есть равнобочная трапеция, то каким должен быть угол наклона ее боковых сторон, чтобы при движении воды по каналу потери на сопротивление трения были наименьшими, т. е. чтобы сумма нижнего основания и боковых сторон трапеции была наименьшая?

368*. От канала шириной 4 *м* отходит под прямым углом другой канал шириной 2 *м*. Какой наибольшей длины бревна можно сплавлять по этим каналам из одного в другой (не учитывая толщины бревен)?

369*. Две точки движутся по осям координат в положительных направлениях с постоянными скоростями v_1 и v_2. В какой момент расстояние между движущимися точками будет наименьшее, если в начальный момент они занимали положения (—3; 0) и (0; 5)?

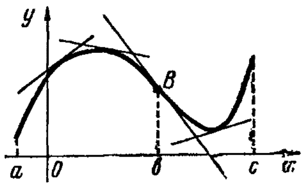
370*. Шар свободно скатывается по наклонной плоскости (черт. 59). Если основание AB остается неизменным, то каков должен быть угол наклона φ, чтобы время скатывания шара было наименьшее?

§ 7. Направление выпуклости кривой и точки перегиба

Если в некотором интервале кривая расположена ниже любой своей касательной, то она называется выпуклой вверх, а если она расположена выше любой своей касательной, то называется выпуклой вниз в этом интервале.

Точкой перегиба называется точка на кривой, где меняется направление ее выпуклости.

На черт. 60 в интервале (a, b) кривая выпукла вверх, в интервале (b, c) она выпукла вниз, а точка B есть точка перегиба.



Черт. 60

Направление выпуклости кривой $y = f(x)$ характеризуется знаком второй производной y'': если в некотором интервале $y'' > 0$, то кривая выпукла вниз, а если $y'' < 0$, то кривая выпукла вверх в этом интервале.

Абсциссы точек перегиба кривой $y = f(x)$, или графика функции $f(x)$, являются точками, в которых меняется поведение производной y'. Поэтому их можно найти по следующему правилу:

I. Найти y'' и точки x, в которых $y'' = 0$ или не существует, а кривая непрерывна и которые лежат внутри области ее расположения.

II. Определить знак y'' слева и справа от каждой из этих точек. Исследуемая точка x будет абсциссой точки перегиба, если по разные стороны от нее y'' имеет разные знаки.

Интервалы, где кривая выпукла вверх и где она выпукла вниз, определяются из условия, что их границами могут быть только абсциссы точек перегиба, точки разрыва и граничные точки области расположения кривой.

371. Определить направление выпуклости и точки перегиба кривых:

1) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; 2) $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$;

3) $y = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$; 4) $y = \frac{1}{(x+1)^3}$;

5)* $y = 2 - |x^5 - 1|$.

Решение. Находим точки перегиба кривой, руководствуясь указанным правилом.