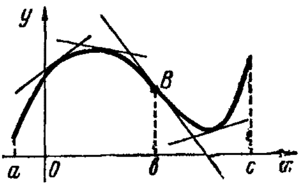
370*. Шар свободно скатывается по наклонной плоскости (черт. 59). Если основание AB остается неизменным, то каков должен быть угол наклона φ, чтобы время скатывания шара было наименьшее?

§ 7. Направление выпуклости кривой и точки перегиба

Если в некотором интервале кривая расположена ниже любой своей касательной, то она называется выпуклой вверх, а если она расположена выше любой своей касательной, то называется выпуклой вниз в этом интервале.

Точкой перегиба называется точка на кривой, где меняется направление ее выпуклости.

На черт. 60 в интервале (a, b) кривая выпукла вверх, в интервале (b, c) она выпукла вниз, а точка B есть точка перегиба.



Черт. 60

Направление выпуклости кривой $y=f(x)$ характеризуется знаком второй производной y'': если в некотором интервале $y''>0$, то кривая выпукла вниз, а если $y''<0$, то кривая выпукла вверх в этом интервале.

Абсциссы точек перегиба кривой $y=f(x)$, или графика функции $f(x)$, являются точками, в которых меняется поведение производной y'. Поэтому их можно найти по следующему правилу:

I. Найти y'' и точки x, в которых $y''=0$ или не существует, а кривая непрерывна и которые лежат внутри области ее расположения.

II. Определить знак y'' слева и справа от каждой из этих точек. Исследуемая точка x будет абсциссой точки перегиба, если по разные стороны от нее y'' имеет разные знаки.

Интервалы, где кривая выпукла вверх и где она выпукла вниз, определяются из условия, что их границами могут быть только абсциссы точек перегиба, точки разрыва и граничные точки области расположения кривой.

371. Определить направление выпуклости и точки перегиба кривых:

1) $y=3x^5-5x^4+4$; 2) $y=3-\sqrt[5]{(x+2)^7}$;

3) $y=4\sqrt{(x-1)^5}+20\sqrt{(x-1)^3}$; 4) $y=\frac{1}{(x+1)^3}$;

5)* $y=2-|x^5-1|$.

Решение. Находим точки перегиба кривой, руководствуясь указанным правилом.

1) I. Ищем точки x, в которых $y''=0$ или не существует, а кривая непрерывна и которые лежат внутри области расположения кривой:

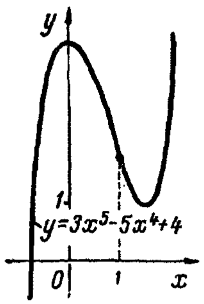
$$y'=15x^4-20x^3;\quad y''=60x^3-60x^2=60x^2(x-1).$$

$y''=0$ в точках $x=0$ и $x=1$. Эти точки являются искомыми, так как область расположения и область непрерывности данной кривой есть вся ось абсцисс. Других точек x, которые могли бы быть абсциссами точек перегиба, нет, так как y'' существует всюду.

II. Исследуем найденные точки, определяя знак y'' слева и справа от каждой из них. Запишем это исследование в таблицу, подобную той, которая составляется при отыскании точек экстремума:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	10
y''	$-$	0	$-$	0	$+$
y	в. вверх	нет перегиба	в. вверх	перегиб	в. вниз

Из таблицы следует, что $x=1$ есть абсцисса точки перегиба кривой: $y(1)=2$. Поскольку эта кривая непрерывная, то во всем интервале $(-\infty, 1)$ она выпукла вверх, а во всем интервале $(1, +\infty)$ — выпукла вниз (черт. 61).



Черт. 61

2) I. Находим вторую производную:

$$y'=-\frac{7}{5}(x+2)^{-\frac{2}{5}};$$

$$y''=-\frac{14}{25}(x+2)^{-\frac{3}{5}}=-\frac{14}{25\sqrt[5]{(x+2)^3}}.$$

Здесь y'' нигде не обращается в нуль, а при $x=-2$ она не существует.

При $x=-2$ кривая может иметь перегиб, так как ее областью расположения и областью непрерывности является вся ось абсцисс.

II. Исследуем значение $x=-2$ по знаку y'' при значениях x, меньших и больших его. Согласно таблице $x=-2$ есть абсцисса точки перегиба.

x	-10	-2	0
y''	$+$	∞	$-$
y	в. вниз	перегиб	в. вверх

Слева от нее во всем интервале $(-\infty, -2)$ данная непрерывная кривая выпукла вниз, а справа, в интервале $(-2, +\infty)$, она выпукла вверх; $y(-2)=3$.

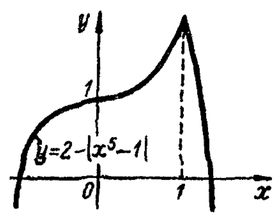
3) I. $y' = 10(x-1)^{\frac{3}{2}} + 30(x-1)^{\frac{1}{2}}$;

$$y'' = 15(x-1)^{\frac{1}{2}} + 15(x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{15x}{\sqrt{x-1}}.$$

Здесь y'' обращается в нуль при $x=0$ и не существует (равна $+\infty$) при $x=1$. Но ни одно из этих значений x не может быть абсциссой точки перегиба, так как областью расположения кривой является интервал $1 \leqslant x < +\infty$; $x=0$ лежит вне этой области, а $x=1$ есть граница этой области, т. е. лежит не внутри ее. Кривая не имеет точек перегиба; во всей области своего расположения она выпукла вниз, так как во всей этой области $y'' > 0$.

4) I. $y' = -\frac{3}{(x+1)^4}$; $\quad y'' = \frac{12}{(x+1)^5}$.

Здесь y'' не может обратиться в нуль, а при $x=-1$ она не существует. Однако $x=-1$ не может быть абсциссой точки перегиба, так как в этой точке кривая разрывна. При $x<-1$, $y''<0$; при $x>-1$, $y''>0$. Поэтому в интервале $(-\infty, -1)$ кривая выпукла вверх, а в интервале $(-1, +\infty)$ она выпукла вниз. *Не имея точек перегиба, эта кривая меняет направление выпуклости при переходе x через точку разрыва $x=-1$.*



Черт. 62

5)* I. $y' = \pm 5x^4$; $y'' = \pm 20x^3$, где знак плюс соответствует значениям x из интервала $(-\infty, 1)$, в котором $x^5-1<0$, а знак минус соответствует значениям x из интервала $(1, +\infty)$, в котором $x^5-1>0$. y'' не существует при $x=1$; $y''=0$ при $x=0$. Эти значения x могут быть абсциссами точек перегиба данной кривой, так как ее областью расположения и областью непрерывности является вся ось абсцисс.

x	-10	0	$\frac{1}{2}$	1	10
y''	$-$	0	$+$	не сущ.	$-$
y	в. вверх	перегиб	в. вниз	перегиб	в. вверх

II. Определяя знак y'' слева и справа от точек $x=0$ и $x=1$, заключаем, что $x=0$ и $x=1$ — абсциссы точек перегиба. Левее точки $x=0$ кривая выпукла вверх, между точками $x=0$ и $x=1$ она выпукла вниз и правее точки $x=1$ выпукла вверх (черт. 62). Ординаты точек перегиба определяются из уравнения кривой по известным их абсциссам: $y(0)=1$; $y(1)=2$. Здесь точка перегиба $(1;\ 2)$ совпадает с угловой точкой кривой, в которой она имеет максимальное значение ординаты и две различные односторонние касательные $y-2=\pm 5(x-1)$.

Найти точки перегиба и исследовать направление выпуклости кривых:

372. $y=x^3-3x^2-9x+9$. **373.** $y=x+36x^2-2x^3-x^4$.

374. $y=1-\ln(x^2-4)$. **375.** $y=x+2-\sqrt[3]{x^5}$.

376. $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$. **377.** $y=\frac{1}{x^2-4}$.

378*. $y=\arcsin\frac{1}{x}$. **379*.** $y=1-|x^2-2|$.

§ 8. Асимптоты

Асимптотой кривой называется такая прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат.

Кривая может приближаться к своей асимптоте теми же способами, как и переменная к своему пределу: оставаясь с одной стороны от асимптоты, как, например, в задаче 380 (1) или с разных сторон, бесчисленное множество раз пересекая асимптоту и переходя с одной ее стороны на другую, как, например, в задаче 380 (3).

Для нахождения асимптот пользуются следующими положениями:

а) если при $x=a$ кривая $y=f(x)$ имеет бесконечный разрыв, т. е. если при $x\to a-0$ или при $x\to a+0$ функция $f(x)$ стремится к бесконечности (того или иного знака), то прямая $x=a$ является ее вертикальной асимптотой;

б) невертикальные асимптоты кривой $y=f(x)$, если они существуют, имеют уравнения вида $y=kx+b$, где параметры k и b определяются формулами

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$$

при одинаковом в обеих формулах поведении x, т. е. в обеих формулах $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$.

380. Найти асимптоты кривых:

1) $y=\frac{x^2-6x+3}{x-3}$; 2) $y=xe^x$; 3) $y=x+\frac{\sin x}{x}$; 4) $y=x\operatorname{arcctg}x$;

5) $y=\ln(4-x^2)$; 6)* $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$.

Решение. 1) (а) При $x=3$ данная кривая имеет бесконечный разрыв. Поэтому прямая $x=3$ есть ее вертикальная асимптота;