известным их абсциссам: $y(0)=1$; $y(1)=2$. Здесь точка перегиба $(1;\ 2)$ совпадает с угловой точкой кривой, в которой она имеет максимальное значение ординаты и две различные односторонние касательные $y-2=\pm 5(x-1)$.

Найти точки перегиба и исследовать направление выпуклости кривых:

372. $y=x^3-3x^2-9x+9$. **373.** $y=x+36x^2-2x^3-x^4$.

374. $y=1-\ln(x^2-4)$. **375.** $y=x+2-\sqrt[3]{x^5}$.

376. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$. **377.** $y=\dfrac{1}{x^2-4}$.

378*. $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$. **379*.** $y=1-|x^2-2|$.

§ 8. Асимптоты

Асимптотой кривой называется такая прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат.

Кривая может приближаться к своей асимптоте теми же способами, как и переменная к своему пределу: оставаясь с одной стороны от асимптоты, как, например, в задаче 380 (1) или с разных сторон, бесчисленное множество раз пересекая асимптоту и переходя с одной ее стороны на другую, как, например, в задаче 380 (3).

Для нахождения асимптот пользуются следующими положениями:

а) если при $x=a$ кривая $y=f(x)$ имеет бесконечный разрыв, т. е. если при $x\to a-0$ или при $x\to a+0$ функция $f(x)$ стремится к бесконечности (того или иного знака), то прямая $x=a$ является ее вертикальной асимптотой;

б) невертикальные асимптоты кривой $y=f(x)$, если они существуют, имеют уравнения вида $y=kx+b$, где параметры k и b определяются формулами

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$$

при одинаковом в обеих формулах поведении x, т. е. в обеих формулах $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$.

380. Найти асимптоты кривых:

1) $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$; 2) $y=xe^x$; 3) $y=x+\dfrac{\sin x}{x}$; 4) $y=x\operatorname{arcctg}x$;

5) $y=\ln(4-x^2)$; 6)* $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$.

Решение. 1) (а) При $x=3$ данная кривая имеет бесконечный разрыв. Поэтому прямая $x=3$ есть ее вертикальная асимптота;

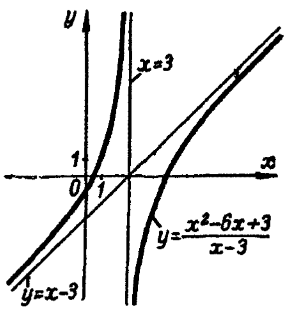
(б) далее ищем невертикальные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\frac{x^2-6x+3}{x^2-3x}=\lim\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1;$$

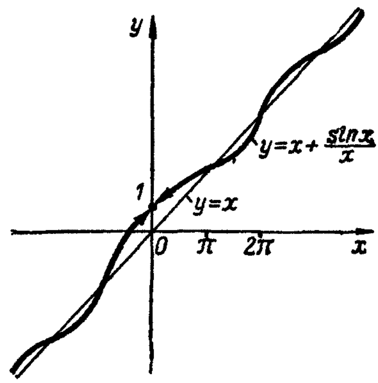
$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim\left(\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right)=$$

$$=\lim\frac{3-3x}{x-3}=\lim\frac{\frac{3}{x}-3}{1-\frac{3}{x}}=-3.$$

Подставляя найденные значения k и b в уравнение $y=kx+b$, получим уравнение невертикальной асимптоты: $y=x-3$. Других невертикальных асимптот кривая не имеет, так как при



Черт. 63



Черт. 64

$x\to-\infty$ значения k и b будут те же самые. Кривая (гипербола) изображена на черт. 63.

2) (а) Кривая не имеет вертикальных асимптот, так как она всюду непрерывна;

(б) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim e^x=+\infty,$

т. е. при $x\to+\infty$ угловой коэффициент асимптоты не существует, вследствие чего при $x\to+\infty$ кривая не имеет асимптоты;

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim e^x=0;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim xe^x=\lim\frac{x}{e^{-x}}=\lim\frac{1}{-e^{-x}}=0.$$

(Здесь применено правило Лопиталя.)

Следовательно, при $x\to-\infty$ кривая имеет невертикальную асимптоту $y=0$ (ось Ox).

3) (а) Кривая $y = x + \frac{\sin x}{x}$ не имеет бесконечных разрывов, поэтому не имеет и вертикальных асимптот;

(б) $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim \left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1$, так как $|\sin x| \leqslant 1$;

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim \frac{\sin x}{x} = 0.$$

При $x \to -\infty$ параметры асимптоты имеют те же значения. Следовательно, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ кривая имеет асимптоту $y = x$. Эта кривая бесчисленное множество раз пересекает свою асимптоту, переходя с одной ее стороны на другую (черт. 64).

Способ приближения кривой к своей невертикальной асимптоте определяется путем исследования знака разности ординат кривой и асимптоты. Здесь эта разность $y_{кр} - y_{ас} = \frac{\sin x}{x}$ бесчисленное множество раз меняет свой знак в точках, где

$$x = k\pi, \quad k = \pm 1, \quad \pm 2, \ldots$$

4) (а) Кривая не имеет вертикальных асимптот, так как она всюду непрерывна;

$$(б) \quad k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg}(+\infty) = 0;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim x \operatorname{arcctg} x = \lim \frac{\operatorname{arcctg} x}{\frac{1}{x}}.$$

Применяя правило Лопиталя дважды, получим

$$b = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arcctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{x^2}{1+x^2} = \lim \frac{2x}{2x} = 1.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ кривая имеет асимптоту $y = 1$;

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg}(-\infty) = \pi;$$

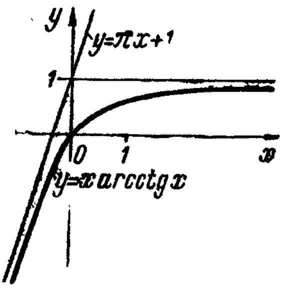
$$b = \lim_{x \to -\infty} (y - kx) = \lim (x \operatorname{arcctg} x - \pi x) = \lim x (\operatorname{arcctg} x - \pi) =$$

$$= \lim \frac{\operatorname{arcctg} x - \pi}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

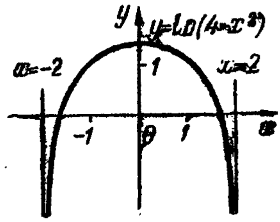
Следовательно, при $x \to -\infty$ кривая имеет асимптоту $y = \pi x + 1$ (черт. 65).

5) (а) Кривая имеет две вертикальные асимптоты $x = -2$ и $x = 2$, так как при $x = \pm 2$ она имеет бесконечные разрывы;

(б) невертикальных асимптот кривая не имеет, ибо ее областью расположения является интервал $-2<x<2$ и поэтому x не может стремиться к бесконечности (черт. 66).



Черт. 65



Черт. 66

6)* (а) Вертикальных асимптот кривая не имеет;

(б) $$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{\sqrt[3]{x^3-6x^2}}{x}=\lim\sqrt[3]{1-\frac{6}{x}}=1,$$

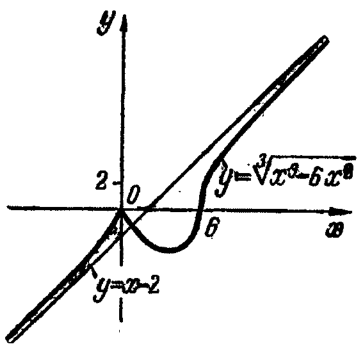
$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim\left(\sqrt[3]{x^3-6x^2}-x\right).$$

Заменяя x через $\frac{1}{\alpha}$ и применяя затем правило Лопиталя, **получим**

$$b=\lim_{\alpha\to+0}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^3}-\frac{6}{\alpha^2}}-\frac{1}{\alpha}\right)=\lim\frac{\sqrt[3]{1-6\alpha}-1}{\alpha}=$$

$$=\lim\frac{\frac{1}{3}(1-6\alpha)^{-\frac{2}{3}}(-6)}{1}=-2.$$

При $x\to-\infty$ значения параметров k и b асимптоты будут те же самые. Следовательно, при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ данная кривая имеет асимптоту $y=x-2$. Эта непрерывная кривая пересекает свою асимптоту в точке, где $x=\frac{2}{3}$, и неограниченно приближается к ней при $x\to-\infty$ сверху, а при $x\to+\infty$ снизу (черт. 67).



Черт. 67

Найти асимптоты кривых:

381. $y=\frac{2x^2-9}{x+2}$. **382.** $y=\frac{x^5}{x^4-1}$.

383. $y=xe^{-x}$. **384.** $y=x\operatorname{arctg}x$.

385*. $y=2x-\frac{\cos x}{x}$. **386*.** $y=x+\frac{\ln x}{x}$.