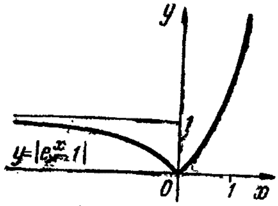
функции обращен выпуклостью вверх, а справа от нее, где $y''=e^x>0$, график функции обращен выпуклостью вниз. Следовательно, $x=0$ есть абсцисса точки перегиба; $y(0)=0$.




Черт. 74

Здесь точка перегиба совпала с угловой точкой, в которой график функции имеет две различные односторонние касательные: $y=-x$, $y=x$ и минимальное значение ординаты.

VIII. Для построения графика функции дополнительно найдем несколько его точек, например $(1;\ e-1)$, $(-1;\ 1-e^{-1})$, $(-2;\ 1-e^{-2})$ и определим угловые коэффициенты касательных (левую и правую производные) в угловой точке $(0;\ 0)$:

$$k_1=y'_{(-)}(0)=-1,\quad k_2=y'_{(+)}(0)=1.$$

Согласно полученным данным график функции изображен на черт. 74.

Исследовать функции и построить их графики:

**388.** $y=x^3+3x^2$. **389.** $y=16x(x-1)^3$.

**390.** $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$. **391.** $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

**392.** $y=\sqrt[3]{1-x^3}$. **393.** $y=(x-3)\sqrt{x}$.

**394.** $y=2(x+1)-3\sqrt[3]{(x+1)^2}$. **395.** $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

**396.** $y=\sin x-\cos x$. **397.** $y=x-2\operatorname{arc\,tg} x$.

**398*.** $y=x-|\sin x|$. **399*.** $y=\arcsin|x|$.

## § 10. Приближенное решение уравнений

1) *Графический метод. Отделение корней.* Действительные корни уравнения $f(x)=0$ являются абсциссами точек пересечения кривой $y=f(x)$ с осью $Ox$, а если это уравнение преобразуется к виду $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, то его действительные корни будут абсциссами точек пересечения кривых $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$.

Пользуясь этим, как было показано в решении задачи 16, можно находить приближенные значения действительных корней алгебраических и трансцендентных уравнений путем построения соответствующих кривых.

Однако этим графическим методом можно получить лишь грубо приближенные значения корней уравнения, но нельзя их вычислить с наперед заданной большой точностью.

Поэтому графический метод обычно применяется лишь как вспомогательное средство для определения числа действительных корней уравнения и для их о т д е л е н и я, т. е. для нахождения таких отрезков оси $Ox$, внутри которых содержится только по одному корню. Затем, после такого отделения корней, каждый из них может быть вычислен с любой желаемой точностью посредством аналитических методов.

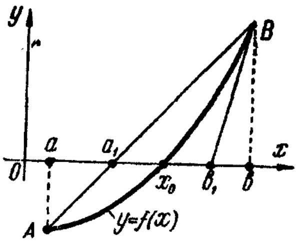
2) *Уточнение корней уравнения методом хорд и касательных.* Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная $f'(x)$ сохраняет знак и если $f(a)\cdot f(b)<0$, то внутри этого отрезка содержится только один действительный корень функции $f(x)$ или уравнения $f(x)=0$.

Если, кроме того, на этом отрезке $f''(x)$ также сохраняет знак, то можно найти границы $a_1$ и $b_1$ более узкого отрезка, содержащего тот же корень, по формулам

$$a_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)},\quad b_1=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)},\qquad (*)$$

где $\beta$ — тот конец отрезка $[a, b]$, в котором $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f''(x)$.

Геометрически (черт. 75) границы нового отрезка $a_1$ и $b_1$ представляют абсциссы точек пересечения с осью $Ox$ хорды $AB$ и касательной $Bb_1$, которые будут ближе к искомому корню $x_0$, чем границы исходного отрезка $[a, b]$.



Черт. 75

Далее, исходя из полученного суженного отрезка, по тем же формулам (*) можно найти границы $a_2$ и $b_2$ еще более узкого отрезка, содержащего в себе корень $x_0$.

Повторяя этот процесс последовательного сужения отрезка, содержащего корень $x_0$, т. е. повторяя применение формул (*), можно найти приближенное значение корня $x_0$ с любой заданной точностью*.

Чтобы найти $x_0$ с точностью до $\delta$, следует вести вычисление $a_n$ и $b_n$ до тех пор, когда впервые окажется

$$|a_n-b_n|<\delta \text{ или } \delta<|a_n-b_n|<2\delta. \qquad (**)$$

Тогда, с точностью до $\delta$, в первом случае $x_0\approx a_n$ (или $x_0\approx b_n$), а во втором случае $x_0\approx\frac{a_n+b_n}{2}$.

**400.** Отделить действительные корни следующих уравнений: 1) $x^2-\cos x=0$; 2) $2x^3+x+1=0$; 3) $x-\operatorname{ctg} x=0$.

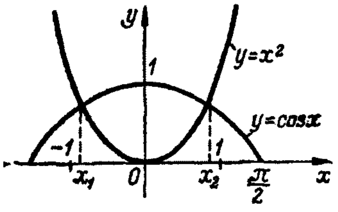
---

* 1) Здесь возможно $a_n \lesseqgtr b_n$. Если, как всегда $a<b$, то при $\beta=b$ будет $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, ..., а при $\beta=a$ будет $a_1>b_1$, $a_2>b_2$, ...

2) При повторном применении формул (*) во вторую из них (формулу касательных) всегда подставляется новая граница $b_n$, вычисленная по этой второй формуле.

Решение. Чтобы отделить действительные корни данного уравнения, т. е. чтобы каждый из них заключить внутри особого небольшого отрезка, воспользуемся графическим методом.

1) Преобразуем данное уравнение к виду $x^2=\cos x$ и построим кривые $y=x^2$ и $y=\cos x$, в одних и тех же координатных осях и при одной и той же единице масштаба (черт. 76).



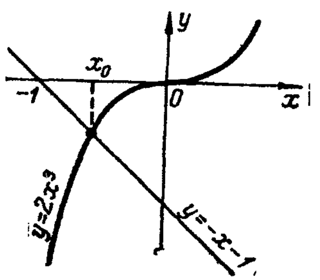

Черт. 76

Число точек пересечения этих кривых равно числу действительных корней данного уравнения, а их абсциссы являются этими корнями.

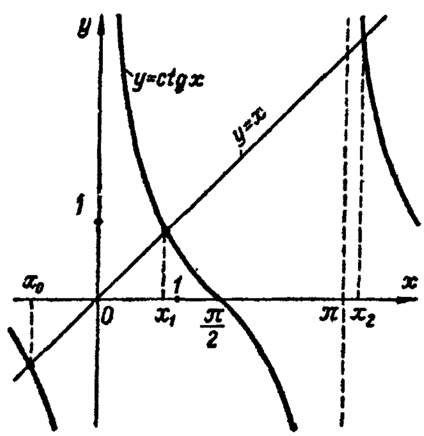
Согласно этому положению из чертежа находим: данное трансцендентное уравнение $x^2-\cos x=0$ имеет два действительных корня, один из которых $x_1$ содержится на отрезке $[-1; -0{,}8]$, а другой $x_2$ на отрезке $[0{,}8;\ 1]$.

2) Преобразуя уравнение $2x^3+x+1=0$ к виду $2x^3=-x-1$ и построив кривые $y=2x^3$ и $y=-x-1$ в одних координатных осях (черт. 77), заключаем: данное алгебраическое уравнение имеет только один действительный корень, содержащийся на отрезке $[-0{,}6;\ -0{,}5]$.

3) Приводим уравнение $x-\operatorname{ctg} x=0$ к виду $x=\operatorname{ctg} x$ и построим кривые $y=x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ (черт. 78). Котангенсоида имеет




Черт. 77



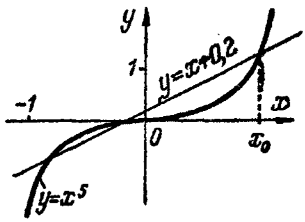

Черт. 78

бесчисленное множество бесконечных ветвей, каждая из которых пересекает прямую $y=x$. Поэтому данное уравнение имеет бесчисленное множество действительных корней. Наименьший положительный корень $x_1$ этого уравнения содержится на отрезке $[0{,}8;\ 0{,}9]$.

**401.** Вычислить с точностью до 0,0001 наибольший корень уравнения

$$x^5 - x - 0{,}2 = 0.$$

Решение. Вначале отделим искомый корень графическим методом. Преобразуя уравнение к виду $x^5 = x + 0{,}2$ и построив кривые $y = x^5$ и $y = x + 0{,}2$ в одних координатных осях (черт. 79), при указанных неодинаковых по осям, но одинаковых для обеих кривых единицах масштаба, заключаем, что искомый наибольший корень содержится на отрезке [1; 1,1].



Черт. 79

Далее вычислим приближенное значение корня с заданной точностью, пользуясь методом хорд и касательных, т. е. применяя формулы (*), сужающие отрезок, заключающий в себе этот корень.

Однако, прежде чем применять эти формулы, следует убедиться в том, что функция $f(x) = x^5 - x - 0{,}2$ и найденный отрезок [1; 1,1] удовлетворяют необходимым условиям, т. е. что:

а) значения функции $f(x)$ на концах отрезка имеют разные знаки и что

б) первая и вторая производные от функции на этом отрезке сохраняют каждая свой знак:

$$\text{а) } f(1) = -0{,}2 < 0; \quad f(1{,}1) = 0{,}31051 > 0;$$

$$\text{б) } f'(x) = 5x^4 - 1 > 0 \text{ и } f''(x) = 20x^3 > 0$$

для всех значений $x$ на отрезке [1; 1,1].

Так как $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f''(x)$ при $x = 1{,}1$, то, обозначив концы отрезка $a = 1$, $b = 1{,}1 = \beta$ и применяя формулы (*), получим:

$$a_1 = 1 - \frac{(1{,}1-1)f(1)}{f(1{,}1) - f(1)} = 1 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}51051} = 1{,}039;$$

$$b_1 = 1{,}1 - \frac{f(1{,}1)}{f'(1{,}1)} = 1{,}1 - \frac{0{,}31051}{6{,}3205} = 1{,}051.$$

К полученным новым границам $a_1$ и $b_1$ более узкого отрезка, содержащего искомый корень, применяем те же формулы (*):

$$a_2 = a_1 - \frac{(b_1 - a_1) f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 1{,}039 + \frac{0{,}012 \cdot 0{,}0282}{0{,}0595} = 1{,}04469;$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 1{,}051 - \frac{0{,}0313}{5{,}1005} = 1{,}04487.$$

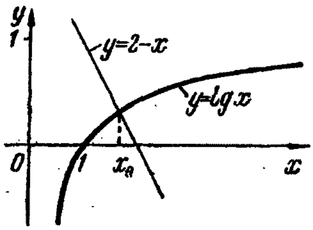
Длина полученного отрезка $[a_2, b_2]$ меньше $2\delta$, но больше $\delta$:

$$0{,}0001 < |a_2 - b_2| = 0{,}00018 < 0{,}0002.$$

Поэтому искомое приближенное значение наибольшего корня данного уравнения с точностью до 0,0001 будет

$$x_0 \approx \frac{a_2 + b_2}{2} = 1{,}0448.$$

**402.** Вычислить с точностью до 0,000001 действительный корень уравнения $2 - x - \lg x = 0$.




Черт. 80

Решение. Чтобы отделить искомый корень, преобразуем уравнение к виду $\lg x = 2 - x$ и построим кривые $y = \lg x$ и $y = 2 - x$ (черт. 80). По чертежу определяем, что искомый корень содержится внутри отрезка [1,6; 1,8].

Для проверки условий, соблюдение которых необходимо при пользовании методом хорд и касательных, вычисляем значения функции $f(x) = 2 - x - \lg x$ на концах найденного отрезка и находим производные $f'(x)$ и $f''(x)$:

$$f(1{,}6) = 2 - 1{,}6 - 0{,}2041 = 0{,}1959 > 0;$$
$$f(1{,}8) = 2 - 1{,}8 - 0{,}2553 = -0{,}0553 < 0;$$
$$f'(x) = -1 - \frac{1}{x}\lg e; \quad f''(x) = \frac{1}{x^2}\lg e;$$
$$f'(x) < 0, \ f''(x) > 0 \text{ на всем отрезке } [1{,}6;\ 1{,}8].$$

Убедившись, что на концах отрезка функция $f(x)$ имеет разные знаки и что на всем этом отрезке производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют каждая свой знак, обозначаем концы отрезка: $a = 1{,}6 = \beta$; $b = 1{,}8$ и применяем уточняющие формулы (*):

$$a_1 = 1{,}6 - \frac{(1{,}8 - 1{,}6)\,f(1{,}6)}{f(1{,}8) - f(1{,}6)} = 1{,}6 + 0{,}1559 = 1{,}7559;$$

$$b_1 = 1{,}6 - \frac{f(1{,}6)}{f'(1{,}6)} = 1{,}6 + 0{,}1540 = 1{,}7540.$$

Повторно применяем формулы (*) до тех пор, пока не получим отрезок $[b_n, a_n]$, длина которого будет удовлетворять одному из условий (**):

$$a_2 = 1{,}7559 - \frac{(1{,}7540 - 1{,}7559)\,f(1{,}7559)}{f(1{,}7540) - f(1{,}7559)} = 1{,}75558;$$

$$b_2 = 1{,}7540 - \frac{f(1{,}7540)}{f'(1{,}7540)} = 1{,}75557;$$

$$a_3 = 1{,}7555816; \quad b_3 = 1{,}7555807.$$

Здесь длина отрезка $[b_3, a_3]$ менее 0,000001; $a_3 - b_3 = 0{,}0000009$. Поэтому искомое приближенное значение корня данного уравнения с точностью до 0,000001

$$x_0 \approx b_3 = 1{,}755581.$$

В задачах 403—406 определить число действительных корней уравнения и вычислить наибольший из них с точностью до 0,01.

**403.** $x^3-9x-5=0$. **404.** $x^4-x-10=0$.

**405.** $x-\sin 2x=0$. **406.** $x-2+e^x=0$.

В задачах 407—410 найти приближенные значения действительных корней уравнения с точностью до 0,01.

**407.** $x^3-6x+3=0$. **408.** $x^4+10x-100=0$.

**409.** $(x-1)^2-2\sin x=0$. **410.** $e^x-2(1-x)^2=0$.

## § 11. Кривизна плоской кривой

Если плоская линия отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y=f(x)$ или уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то ее кривизна $K$ в любой точке определяется формулой

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{1}$$

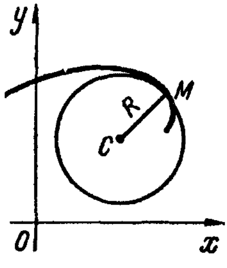
где $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ — первая и вторая производные от $x$ и $y$ по параметру $t$.

*Кривизна линии в некоторой ее точке характеризует отклонение линии от своей касательной в этой точке.*

Из всех плоских линий *постоянную кривизну имеют только прямая и окружность*. У всех других линий кривизна меняется от точки к точке. *Кривизна прямой всюду равна нулю*; у других линий кривизна может равняться нулю только в отдельных точках. *Кривизна окружности радиуса $R$ всюду равна $\frac{1}{R}$*.

*Величина $R$, обратная кривизне кривой в некоторой ее точке, $R=\frac{1}{K}$, называется радиусом кривизны кривой в этой точке.*

*Кругом кривизны кривой в ее точке $M$ называется окружность с радиусом, равным радиусу кривизны кривой в точке $M$, центр которой $C$ лежит на нормали к кривой в точке $M$ со стороны ее вогнутости* (черт. 81).



Черт. 81

Координаты $(X, Y)$ центра кривизны (центра круга кривизны) кривой в ее точке $M(x, y)$ определяются формулами

$$X=x-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\,\dot{y}=x-\frac{1+(y')^2}{y''}\,y',$$

$$Y=y+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\,\dot{x}=y+\frac{1+(y')^2}{y''}. \tag{2}$$