В задачах 403—406 определить число действительных корней уравнения и вычислить наибольший из них с точностью до 0,01.

403. $x^3-9x-5=0$. **404.** $x^4-x-10=0$.

405. $x-\sin 2x=0$. **406.** $x-2+e^x=0$.

В задачах 407—410 найти приближенные значения действительных корней уравнения с точностью до 0,01.

407. $x^3-6x+3=0$. **408.** $x^4+10x-100=0$.

409. $(x-1)^2-2\sin x=0$. **410.** $e^x-2(1-x)^2=0$.

§ 11. Кривизна плоской кривой

Если плоская линия отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y=f(x)$ или уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то ее кривизна K в любой точке определяется формулой

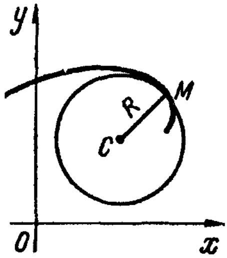
$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (1)$$

где $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ — первая и вторая производные от x и y по параметру t.

Кривизна линии в некоторой ее точке характеризует отклонение линии от своей касательной в этой точке.

Из всех плоских линий *постоянную кривизну имеют только прямая и окружность*. У всех других линий кривизна меняется от точки к точке. *Кривизна прямой всюду равна нулю*; у других линий кривизна может равняться нулю только в отдельных точках. *Кривизна окружности радиуса R всюду равна $\frac{1}{R}$.*

Величина R, обратная кривизне кривой в некоторой ее точке, $R=\frac{1}{K}$, называется радиусом кривизны кривой в этой точке.



Черт. 81

Кругом кривизны кривой в ее точке M называется окружность с радиусом, равным радиусу кривизны кривой в точке M, центр которой C лежит на нормали к кривой в точке M со стороны ее вогнутости (черт. 81).

Координаты (X, Y) центра кривизны (центра круга кривизны) кривой в ее точке $M(x, y)$ определяются формулами

$$X=x-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\,\dot{y}=x-\frac{1+(y')^2}{y''}\,y',$$

$$Y=y+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\,\dot{x}=y+\frac{1+(y')^2}{y''}. \qquad (2)$$

Геометрическое место центров кривизны $C(X, Y)$ линии называется эволютой этой линии. Уравнения (2) являются параметрическими уравнениями эволюты.

Сама кривая по отношению к своей эволюте называется эвольвентой.

411. Найти кривизну кривой: 1) $x=t^2$, $y=2t^3$ в точке, где $t=1$; 2) $y=\cos 2x$ в точке, где $x=\frac{\pi}{2}$.

Решение. 1) Находим производные $\dot{x}=2t$, $\ddot{x}=2$, $\dot{y}=6t^2$, $\ddot{y}=12t$, вычисляем их значения в точке, где $t=1$:

$$\dot{x}=2,\ \ddot{x}=2,\ \dot{y}=6,\ \ddot{y}=12$$

и, подставляя в формулу (1), получим

$$K=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\cdot 12-6\cdot 2}{(2^2+6^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{20\sqrt{10}}.$$

2) Из данного уравнения находим первую и вторую производные от y по x:

$$y'=-2\sin 2x,\ y''=-4\cos 2x,$$

вычисляем их значения в данной точке: $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$ и, подставляя в формулу (1), получим $K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=4$.

412. Определить радиусы кривизны в вершинах эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Решение. Найдем производные $\dot{x}=-a\sin t$, $\ddot{x}=-a\cos t$, $\dot{y}=b\cos t$, $\ddot{y}=-b\sin t$ и определим радиус кривизны эллипса в любой его точке:

$$R(t)=\frac{1}{K(t)}=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Для вершин эллипса, лежащих на его оси $2a$, параметр t равен 0 или π. Поэтому радиус кривизны эллипса в этих вершинах $R(0)=R(\pi)=\frac{b^2}{a}$.

В двух других вершинах эллипса, лежащих на оси $2b$, $t=\frac{\pi}{2}$ или $t=\frac{3\pi}{2}$. В этих вершинах радиус кривизны эллипса $R\left(\frac{\pi}{2}\right)=R\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{a^2}{b}$.

413. Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой:

1) $y=4x-x^2$ в ее вершине;

2) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ в точке, где $t=\frac{\pi}{2}$.

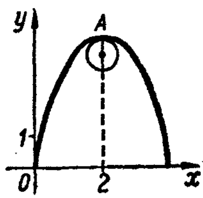
Решение. 1) Данное уравнение определяет параболу, ось которой параллельна оси Oy. Найдем ее вершину как точку, где касательная параллельна оси Ox, т. е. где $y'=0$:

$$y'=4-2x;\ y'=0 \text{ при } x=2;\ y(2)=4.$$

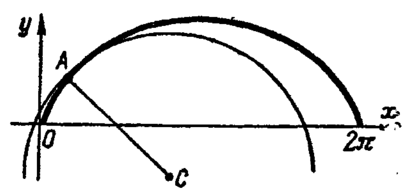
Далее по формулам (2) находим координаты центра кривизны C данной параболы в ее вершине (2; 4)

$$X=x-\frac{1+(y')^2}{y''}y'=2;\quad Y=y+\frac{1+(y')^2}{y''}=\frac{7}{2}$$

и строим параболу и круг кривизны в ее вершине (черт. 82).



Черт. 82



Черт. 83

2) Находим производные $\dot{x}=1-\cos t$, $\ddot{x}=\sin t$, $\dot{y}=\sin t$, $\ddot{y}=\cos t$, их значения при $t=\frac{\pi}{2}$:

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \ddot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \dot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \ddot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

и по формулам (2) координаты центра кривизны

$$X=x-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{y}=\frac{\pi}{2}+1;\ Y=y+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\dot{x}=-1.$$

Затем строим данную циклоиду, ее точку $A\left(\frac{\pi}{2}-1;\ 1\right)$, где $t=\frac{\pi}{2}$, найденный центр кривизны $C\left(\frac{\pi}{2}+1;\ -1\right)$ и круг кривизны (черт. 83).

414. В каких точках параболы $y=\sqrt{2}x^2$ радиус кривизны равен единице?

Решение. Находим производные $y'=2\sqrt{2}x$, $y''=2\sqrt{2}$ и по формуле (1) радиус кривизны параболы в любой ее точке с абсциссой x:

$$R(x)=\frac{(1+8x^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}}.$$

Полагая $R(x)=1$, получим абсциссы искомых точек

$$2\sqrt{2}=(1+8x^2)^{\frac{3}{2}};\ (2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}=1+8x^2;\ 8x^2=1;\ x=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

415. В какой точке кривая $y=e^x$ имеет наибольшую кривизну?

Решение. Находим производные $y'=y''=e^x$ и кривизну данной кривой в любой точке:

$$K(x)=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}.$$

Далее ищем наибольшее значение функции $K(x)$, которая определена и непрерывна на всей числовой оси:

$$K'(x)=\frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}}};\quad K'(x)=0\ \textit{при}\ 1-2e^{2x}=0,$$

т. е. в единственной точке $x_0=-\frac{\ln 2}{2}$. Определяя знаки $K'(x)$ слева и справа от этой критической точки: $K'(-10)>0$, $K'(0)<0$, устанавливаем, что она является точкой максимума функции $K(x)$. Поскольку x_0 есть единственная точка экстремума непрерывной функции $K(x)$ во всем интервале $(-\infty,\ +\infty)$, то в этой точке она достигает и своего наибольшего значения. Следовательно, искомая точка есть $\left(-\frac{\ln 2}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (Ордината этой точки вычислена из данного уравнения кривой по известной ее абсциссе.)

416. Найти уравнение эволюты кривой и построить кривую и ее эволюту:

1) $x^2=2(1-y)$; 2) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$.

Решение. 1) Из данного уравнения параболы находим производные: $y'=-x$, $y''=-1$ и по формулам (2) находим координаты любой точки на ее эволюте:

$$X=x-\frac{1+(y')^2}{y''}y'=x-\frac{1+x^2}{-1}(-x);\qquad \left\{\begin{aligned}X&=-x^3,\\ Y&=-\frac{3}{2}x^2.\end{aligned}\right.$$
$$Y=y+\frac{1+(y')^2}{y''}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1+x^2}{-1};$$

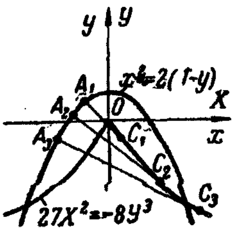
Это параметрические уравнения эволюты. Исключая из них параметр x, получим $27X^2=-8Y^3$ — уравнение полукубической параболы. Данная парабола и найденная ее эволюта изображены на черт. 84.

2) Из уравнений эллипса найдем производные $\dot{x}=-a\sin t$, $\ddot{x}=-a\cos t$, $\dot{y}=b\cos t$, $\ddot{y}=-b\sin t$ и по формулам (2) получим,

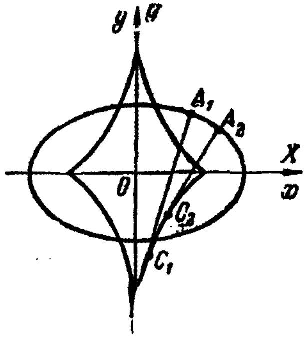
после упрощений, параметрические уравнения эволюты эллипса

$$X=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\quad Y=-\frac{c^2}{b}\sin^3 t,\quad \text{где } c^2=a^2-b^2.$$

Эллипс и его эволюта построены на черт. 85.



Черт. 84



Черт. 85

Найти радиус кривизны кривой:

417. $xy=4$ в точке (2; 2) и в точке, где $x=8$.

418. $y=e^{-x^2}$ в точке пересечения с осью Oy.

419. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ в точке, где $t=\pi$.

420. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ в любой ее точке.

Найти координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой:

421. $3y=x^3$ в точке, где $x=-1$.

422. $y^3=x^2$ в точке, где $y=1$.

423. $y=\ln x$ в точке пересечения с осью Ox.

424. $y=e^x$ в точке пересечения с осью Oy.

Найти точки кривых с наименьшим радиусом кривизны:

425. $y=\ln x$. **426.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

Найти уравнение эволюты кривой и построить кривую и ее эволюту:

427. $y^2-2x=0$. **428.** $x^2-y^2=a^2$.

429. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.