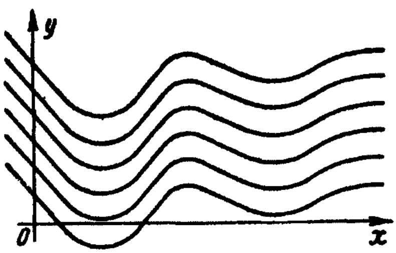
ГЛАВА IV

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные формулы интегрирования

Отыскание функции $F(x)$ по известному ее дифференциалу $dF(x)=f(x)dx$ [или по известной ее производной $F'(x)=f(x)$], т. е. действие обратное дифференцированию, *называется интегрированием*, а искомая функция $F(x)$ называется первообразной функцией от функции $f(x)$.



Черт. 86

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество различных первообразных функций, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым: если $F(x)$ есть первообразная от $f(x)$, т. е. если $F'(x)=f(x)$, то и $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, есть также первообразная от $f(x)$, ибо $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$.

Общее выражение $F(x)+C$ совокупности всех первообразных от функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается знаком $\int$:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \text{ если } d[F(x)+C]=f(x)\,dx.$$

Геометрически, в системе координат xOy, графики всех первообразных функций от данной функции $f(x)$ представляют семейство кривых, зависящее от одного параметра C, которые получаются одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси Oy (черт. 86).

Свойства неопределенного интеграла.

I. $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x)$ или $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$.

II. $\int F'(x)\,dx=F(x)+C$ или $\int dF(x)=F(x)+C$.

III. $\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$, т. е. *постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.*

IV. $\int [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx-\int f_3(x)\,dx$,

т. е. *интеграл от суммы равен сумме интегралов от всех слагаемых.*

Основные формулы интегрирования:

1. $\int u^{a}\,du=\frac{u^{a+1}}{a+1}+C,\ a\neq-1.$

2. $\int u^{-1}\,du=\int\frac{du}{u}=\int\frac{u'}{u}\,dx=\ln|u|+C.$

3. $\int a^{u}\,du=\frac{a^{u}}{\ln a}+C;\ \int e^{u}\,du=e^{u}+C.$

4. $\int \sin u\,du=-\cos u+C.$

5. $\int \cos u\,du=\sin u+C.$

6. $\int \sec^2 u\,du=\operatorname{tg} u+C.$

7. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du=-\operatorname{ctg} u+C.$

8. $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a}+C.$

9. $\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$

10. $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C.$

11. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a}\right|+C.$

В этих формулах a — постоянная, u — независимая переменная или любая (дифференцируемая) функция от независимой переменной. Например:

Интеграл $I_1=\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$ представляет формулу 1 при $u=x$, $a=\frac{1}{2}$. Согласно этой формуле $I_1=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Интеграл $I_2=\int 3^x\,dx$ представляет формулу 3 при $u=x$, $a=3$. Согласно этой формуле $I_2=\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

Интеграл $I_3=\int\frac{dt}{t^2+3}$ представляет формулу 8 при $u=t$, $a=\sqrt{3}$. По этой формуле $I_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C$.

Интеграл $I_4 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2-5}}$ представляет формулу 11 при $u=\varphi$, $a=-5$. По этой формуле $I_4 = \ln|\varphi+\sqrt{\varphi^2-5}|+C$.

Интеграл $I_5 = \int \frac{2x}{x^2+7}dx = \int \frac{(x^2+7)'}{x^2+7}dx = \int \frac{d(x^2+7)}{x^2+7}$ представляет формулу 2 при $u=x^2+7$, так как $(x^2+7)'=2x$. По этой формуле $I_5 = \ln(x^2+7)+C$. Здесь опущен знак абсолютной величины, ибо всегда $x^2+7>0$.

Вообще, *в формулах* 2, 9, 11 *следует писать знак абсолютной величины только в тех случаях, когда логарифмируемое выражение может иметь отрицательные значения.*

Интеграл $I_6 = \int 5\sin 5t\,dt = \int \sin 5t\,d(5t)$ представляет формулу 4 при $u=5t$. Поэтому $I_6 = -\cos 5t + C$.

Интеграл $I_7 = \int e^{\sin\varphi}\cos\varphi\,d\varphi = \int e^{\sin\varphi}d\sin\varphi$, так как $\cos\varphi\,d\varphi = d\sin\varphi$. По формуле 3 при $u=\sin\varphi$ получим: $I_7 = e^{\sin\varphi}+C$.

Интеграл $I_8 = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-1} = \int \frac{de^x}{(e^x)^2-1}$, так как $e^x dx = de^x$. По формуле 9 при $u=e^x$, $a=1$, получим $I_8 = \frac{1}{2}\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+C$.

Справедливость формул интегрирования, а также и каждый результат интегрирования можно проверить путем дифференцирования, ибо, как было упомянуто, интегрирование есть действие, обратное дифференцированию.

В простейшем случае, когда заданный интеграл представляет одну из формул интегрирования, задача интегрирования сводится к простому применению этой формулы.

Во всех других случаях задача интегрирования состоит в том, чтобы путем подходящих преобразований привести данный интеграл к одной или нескольким формулам интегрирования (если это возможно).

430. Найти следующие интегралы и проверить результаты дифференцированием:

1) $\int \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$; 3) $\int 3^t 5^t dt$; 4) $\int \sqrt{y+1}\,dy$; 5) $\int \frac{dx}{2x^2-6}$.

Решение: 1) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2}+C = C-\frac{1}{2x^2}$, по формуле 1, при $u=x$, $a=-3$.

Проверка. Находим дифференциал полученной функции и убеждаемся, что он равен подынтегральному выражению:

$$d\left(C-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2}(x^{-2})'\,dx = x^{-3}dx = \frac{dx}{x^3}.$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$, по формуле 10, при $u=x$, $a=\sqrt{2}$.

Проверка. $d\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C\right)=\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'dx=$

$$=\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}dx=\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}.$$

3) $\int 3^t 5^t\,dt=\int 15^t\,dt=\frac{15^t}{\ln 15}+C$, по формуле 3, при $u=t$, $a=15$.

Проверка. $d\left(\frac{15^t}{\ln 15}+C\right)=\frac{1}{\ln 15}\cdot 15^t\ln 15\,dt=15^t\,dt.$

4) $\int\sqrt{y+1}\,dy=\int(y+1)^{\frac{1}{2}}d(y+1)=\frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}+C=$ $=\frac{2}{3}\sqrt{(y+1)^3}+C$, по формуле 1, при $u=y+1$, $a=\frac{1}{2}$, так как $d(y+1)=dy$.

Проверка. $d\left[\frac{2}{3}\sqrt{(y+1)^3}+C\right]=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(y+1)^{\frac{1}{2}}dy=\sqrt{y+1}\,dy.$

5) $\int\frac{dx}{2x^2-6}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$ согласно свойству III и по формуле 9, при $u=x$, $a=\sqrt{3}$.

Проверка. $d\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C\right)=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\ln|x-\sqrt{3}|-$ $-\ln|x+\sqrt{3}|)'dx=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{3}}-\frac{1}{x+\sqrt{3}}\right)dx=\frac{dx}{2(x^2-3)}.$

Здесь для нахождения производных $(\ln|x-\sqrt{3}|)'$ и $(\ln|x+$ $+\sqrt{3}|)'$ применена формула $(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}$.

431. Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}$; 2) $\int\frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}}$; 3) $\int\cos 3\varphi\,d\varphi$;

4) $\int e^{-\frac{x}{2}}dx$; 5) $\int\sin(ax+b)\,dx$; 6) $\int\frac{1}{5x+4}dx$.

Решение. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C=$ $=\frac{3}{2\sqrt[3]{5}}\sqrt[3]{x^2}+C$, согласно свойству III и по формуле 1, при $u=x$, $a=-\frac{1}{3}$.

2) $\int\frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2t)}{\sqrt{3-(2t)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{3}}+C$, согласно свойству III и по формуле 10, при $u=2t$, $a=\sqrt{3}$.

3) Умножаем и делим интеграл на 3 и вносим множитель 3 под знак интеграла (согласно свойству III), затем под знак дифференциала:

$$\int \cos 3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\int \cos 3\varphi\, d\,(3\varphi) = \frac{1}{3}\sin 3\varphi + C,$$

по формуле 5, при $u = 3\varphi$.

4) Умножим и разделим интеграл на —2 и внесем делитель —2 под знаки интеграла и дифференциала:

$$\int e^{-\frac{x}{2}}\, dx = -2\int e^{-\frac{x}{2}}\, d\left(-\frac{x}{2}\right) = -2e^{-\frac{x}{2}} + C,$$

по формуле 3, при $u = -\frac{x}{2}$.

5) Умножая и деля на a и замечая, что $a dx = d(ax+b)$, получим

$$\int \sin(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int \sin(ax+b)\, d(ax+b) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C,$$

по формуле 4, при $u = ax+b$.

6) Умножая и деля на 5, получим:

$$\int \frac{1}{5x+4}\, dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x+4}\, dx = \frac{1}{5}\ln|5x+4| + C,$$

по формуле 2, при $u = 5x+4$; $u' = 5$.

Этот интеграл можно найти иначе:

$$\int \frac{1}{5x+4}\, dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+\frac{4}{5}}\, dx = \frac{1}{5}\ln\left|x+\frac{4}{5}\right| + C,$$

по формуле 2, при $u = x + \frac{4}{5}$, $u' = 1$.

Полученные результаты оба правильные, в чем можно убедиться путем их дифференцирования.

432. Найти интегралы

1) $\int (3-2x)^7 dx$; 2) $\int \sec^2(m-nx)\, dx$; 3) $\int \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi$.

Решение. 1) Умножаем и делим на —2, вносим множитель —2 под знак интеграла, согласно свойству III, и заменяя $-2dx$ через $d(3-2x)$, что одно и то же, получим:

$$\int (3-2x)^7 dx = -\frac{1}{2}\int (3-2x)^7(-2dx) = -\frac{1}{2}\int (3-2x)^7 d(3-2x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-2x)^8}{8} + C,$$

по формуле 1, при $u = 3-2x$, $a = 7$.

2) Умножая и деля на $-n$ и используя равенство $-n dx = d(m-nx)$, найдем:

$$\int \sec^2(m-nx)\, dx = -\frac{1}{n}\int \sec^2(m-nx)\cdot(-n dx) = -\frac{1}{n}\int \sec^2(m-nx)\, d(m-nx) = -\frac{1}{n}\operatorname{tg}(m-nx) + C,$$

по формуле 6, при $u = m-nx$.

3) Заменяя $\operatorname{tg}\varphi$ через $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, получим:

$$\int \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi = \int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} d\varphi = -\int \frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi} d\varphi = -\int \frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi} =$$
$$= -\ln|\cos\varphi| + C,$$

по формуле 2, при $u = \cos\varphi$ ($u' = -\sin\varphi$, $du = -\sin\varphi\, d\varphi$).

Полезно запомнить словесное выражение формулы 2: интеграл от дроби, числитель которой является дифференциалом знаменателя, равен логарифму абсолютной величины знаменателя.

Найти следующие интегралы и проверить результаты дифференцированием:

(Для сокращения записей в ответах к задачам этой главы произвольная постоянная C опущена.)

433. $\int x^4\, dx$. **434.** $\int \sqrt[5]{t^2}\, dt$.

435. $\int \frac{dy}{3y^2}$. **436.** $\int \frac{dx}{x+3}$.

437. $\int (\alpha-5)^8\, d\alpha$. **438.** $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

439. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+7}}$. **440.** $\int \frac{dz}{2z^2-4}$.

441. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **442.** $\int \sin\frac{x}{3}\, dx$.

443. $\int \operatorname{cosec}^2 2\varphi\, d\varphi$. **444.** $\int e^{4x}\, dx$.

445. $\int \frac{3dt}{5^{2t}}$. **446.** $\int \frac{dx}{2x+5}$.

447. $\int \frac{dx}{(3x+2)^3}$. **448.** $\int \operatorname{ctg} x\, dx$.

§ 2. Интегрирование посредством разложения подынтегральной функции на слагаемые

Если подынтегральная фуикция представляет алгебраическую сумму нескольких слагаемых, то, согласно свойству IV, можно интегрировать каждое слагаемое отдельно.

Пользуясь этим, можно многие интегралы привести к сумме более простых интегралов.

449. Найти интегралы:

1) $\int (3x^2-2x+5)\, dx$; 2) $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3} dx$; 3) $\int (1+e^x)^2\, dx$;

4) $\int \frac{2x+3}{x^2-5} dx$; 5) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$; 6) $\int \operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi$.