3) Заменяя $\operatorname{tg}\varphi$ через $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, получим:

$$\int \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi = \int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} d\varphi = -\int \frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi} d\varphi = -\int \frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi} =$$
$$= -\ln|\cos\varphi| + C,$$

по формуле 2, при $u = \cos\varphi$ $(u' = -\sin\varphi,\ du = -\sin\varphi\, d\varphi)$.

Полезно запомнить словесное выражение формулы 2: интеграл от дроби, числитель которой является дифференциалом знаменателя, равен логарифму абсолютной величины знаменателя.

Найти следующие интегралы и проверить результаты дифференцированием:

(Для сокращения записей в ответах к задачам этой главы произвольная постоянная C опущена.)

433. $\int x^4\, dx$. **434.** $\int \sqrt[5]{t^2}\, dt$.

435. $\int \frac{dy}{3y^2}$. **436.** $\int \frac{dx}{x+3}$.

437. $\int (\alpha - 5)^8\, d\alpha$. **438.** $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

439. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+7}}$. **440.** $\int \frac{dz}{2z^2-4}$.

441. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **442.** $\int \sin\frac{x}{3}\, dx$.

443. $\int \operatorname{cosec}^2 2\varphi\, d\varphi$. **444.** $\int e^{4x}\, dx$.

445. $\int \frac{3dt}{5^{2t}}$. **446.** $\int \frac{dx}{2x+5}$.

447. $\int \frac{dx}{(3x+2)^3}$. **448.** $\int \operatorname{ctg} x\, dx$.

§ 2. Интегрирование посредством разложения подынтегральной функции на слагаемые

Если подынтегральная фуикция представляет алгебраическую сумму нескольких слагаемых, то, согласно свойству IV, можно интегрировать каждое слагаемое отдельно.

Пользуясь этим, можно многие интегралы привести к сумме более простых интегралов.

449. Найти интегралы:

1) $\int (3x^2 - 2x + 5)\, dx$; 2) $\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3} dx$; 3) $\int (1 + e^x)^2\, dx$;

4) $\int \frac{2x+3}{x^2-5} dx$; 5) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$; 6) $\int \operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi$.

Решение. 1) Интегрируя каждое слагаемое отдельно, получим:

$$\int (3x^2-2x+5)\,dx=\int 3x^2\,dx-\int 2x\,dx+\int 5dx=3\int x^2\,dx-$$
$$-2\int x\,dx+5\int dx=3\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+5x+C=x^3-x^2+5x+C,$$

по формуле 1.

2) Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель почленно на знаменатель. Затем интегрируем каждое слагаемое отдельно:

$$\int \frac{2x^2+x-1}{x^3}\,dx=2\int\frac{dx}{x}+\int x^{-2}\,dx-\int x^{-3}\,dx=2\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C,$$

по формулам 2, 1.

3) Возводим в квадрат и, интегрируя каждое слагаемое, получим

$$\int (1+e^x)^2\,dx=\int (1+2e^x+e^{2x})\,dx=$$
$$=\int dx+2\int e^x\,dx+\frac{1}{2}\int e^{2x}\,d\,(2x)=x+2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C.$$

4) Разложим подынтегральную дробь на две слагаемых дроби, затем интегрируем по формулам 2 и 9:

$$\int\frac{2x+3}{x^2-5}dx=\int\frac{2x\,dx}{x^2-5}+3\int\frac{dx}{x^2-5}=\ln|x^2-5|+\frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C.$$

5) Деля числитель на знаменатель, исключим из неправильной подынтегральной дроби целую часть *, затем интегрируем:

$$\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=x-\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

6) Пользуясь тригонометрической формулой $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$, имеем:

$$\int \operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi=\int(\sec^2\varphi-1)\,d\varphi=\int\sec^2\varphi\,d\varphi-\int d\varphi=\operatorname{tg}\varphi-\varphi+C.$$

Найти интегралы:

450. $\int (2\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{2x}+5)\,dx.$

451. $\int (\sin\varphi-\cos\varphi)^2\,d\varphi.$

452. $\int\frac{x^2+1}{x^2-1}dx$**.

453. $\int\frac{5x^2-6x+1}{\sqrt{x}}\,dx.$

454. $\int\frac{x^3}{x^2+6}dx$**.

455. $\int (\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2\,dx.$

456. $\int (e^x-e^{-x})^3\,dx.$

457. $\int\frac{x^2-2}{x+2}dx$*.

---

* Алгебраическая рациональная дробь называется неправильной, если степень многочлена-числителя выше или равна степени многочлена-знаменателя.

** Здесь, как в решении 449(5), из подынтегральной неправильной дроби нужно исключить целую часть.