§ 3. Интегрирование посредством замены переменной

Весьма эффективным методом интегрирования является метод замены переменной интегрирования, в результате чего заданный интеграл заменяется другим интегралом. Для нахождения интеграла $\int f(x)\,dx$ можно заменить переменную x новой переменной t, связанной с x подходящей формулой $x=\varphi(t)$. Определив из этой формулы $dx=\varphi'(t)\,dt$ и подставляя, получим

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=\int F(t)\,dt.$$

Если полученный интеграл с новой переменной интегрирования t будет найден, то преобразовав результат к переменной x, пользуясь исходной формулой $x=\varphi(t)$, получим искомое выражение заданного интеграла.

Например, чтобы найти интеграл $J=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, положим $x=t^2$. Тогда $dx=2t\,dt$ и

$$J=\int\frac{2t\,dt}{1+t}=2\int\frac{t+1-1}{t+1}\,dt=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\int dt-$$
$$-2\int\frac{dt}{t+1}=2t-2\ln(t+1)+C=2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C.$$

Или иначе: пусть $t=1+\sqrt{x}$. Отсюда $x=(t-1)^2$, $dx=2(t-1)\,dt$ и
$$J=\int\frac{2(t-1)\,dt}{t}=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t}=2t-2\ln t+C=$$
$$=2(1+\sqrt{x})-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

Полученные результаты отличаются постоянным слагаемым 2; оба они правильные, в чем можно убедиться путем их дифференцирования.

Как показано в этом примере, при замене переменной можно брать как формулу $x=\varphi(t)$, выражающую x через t, так и формулу $t=\psi(x)$, выражающую t через x.

Выбор удачной формулы (подстановки) для замены переменной имеет большое значение. Вместе с тем дать одно общее правило для выбора хорошей подстановки невозможно. Некоторые частные правила для важнейших типов интегралов даются ниже.

458. Найти интегралы:

1) $\int\frac{2x\,dx}{x^4+3}$; 2) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$; 3) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+a}}$;

4) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$; 5) $\int\frac{dy}{\sqrt{e^y+1}}$; 6) $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$.

Решение. 1) Полагаем $x^2=t$; дифференцируем $2x\,dx=dt$, подставляем в подынтегральное выражение, находим полученный новый интеграл и возвращаемся к заданной переменной x:

$$\int\frac{2x\,dx}{x^4+3}=\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C.$$

2) Положим $1+2\cos x=t$. Тогда $-2\sin x\,dx=dt$ и

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=-\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C=$$
$$=C-\sqrt{t}=C-\sqrt{1+2\cos x}.$$

3) Беря подстановку $x^2+a=z$, имеем $2x\,dx=dz$ и

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+a}}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt[3]{z}}=\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{3}}\,dz=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}+C=$$
$$=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+a)^2}+C.$$

4) Подстановка $1+\ln x=v$ дает $\frac{dx}{x}=dv$ и

$$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx=\int\sqrt{v}\,dv=\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C.$$

5) Берем подстановку $e^y+1=t^2$, дифференцируем $e^y\,dy=2t\,dt$, определяем $dy=\frac{2t\,dt}{e^y}=\frac{2t\,dt}{t^2-1}$, подставляем в подынтегральное выражение, интегрируем и возвращаемся к переменной y:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{e^y+1}}=\int\frac{2t\,dt}{t(t^2-1)}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}+C=$$
$$=\ln\frac{\sqrt{e^y+1}-1}{\sqrt{e^y+1}+1}+C.$$

6) Полагая $t=\sin\varphi$, получим $dt=\cos\varphi\,d\varphi$,

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}}=\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\operatorname{tg}\varphi+C=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+C=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}+C.$$

Найти следующие интегралы и проверить результаты дифференцированием:

459. $\int\frac{x^2dx}{5-x^6}$. Подстановка $t=x^3$.

460. $\int\frac{e^x\,dx}{3+4e^x}$. Подстановка $z=3+4e^x$.

461. $\int\operatorname{tg}^3\varphi\,d\varphi$. Подстановка $\varphi=\operatorname{arc\,tg}t$.

462. $\int x^3\sqrt{a-x^2}\,dx$. Подстановка $\sqrt{a-x^2}=z$.

463. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}dx$. Подстановка $x-2=t$.

464. $\int x\sqrt{a-x}\,dx$. Подстановка $a-x=t^2$.

465*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Подстановка $x=\frac{1}{t}$.

466*. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$. Подстановка $\operatorname{tg} x=z$.

Найти интегралы:

467. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

468. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

469. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x-1}$.

470. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

471. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+2\sin^2 x}}$.

472. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$.

473*. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$.

474*. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$.

§ 4. Интегрирование по частям

Из формулы дифференциала произведения $d(uv)=u\,dv+v\,du$ интегрированием обеих частей равенства получается **формула интегрирования по частям**:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \qquad (*)$$

По этой формуле отыскание интеграла $\int u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\,du$. Применение ее целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл будет проще исходного или когда он будет ему подобен.

Для применения формулы интегрирования по частям к некоторому интегралу $\int f(x)\,dx$ следует подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ представить в виде произведения двух множителей: u и dv; за dv всегда выбирается такое выражение, **содержащее** dx, из которого посредством интегрирования можно найти v; за u в большинстве случаев принимается функция, которая при дифференцировании упрощается (например: $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} 3x$, $\ln x$, x^3).

475. Найти интегралы:

1) $\int x\cos x\,dx$; 2) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$; 3) $\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx$;

4) $\int \arcsin x\,dx$; 5) $\int x^2e^{3x}dx$; 6) $\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx$.

Решение. 1) Положив $u=x$, $dv=\cos x\,dx$, найдем: $du=dx$, $v=\int\cos x\,dx=\sin x$. Подставляя в формулу (*), получим

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C.$$