463. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}dx$. Подстановка $x-2=t$.

464. $\int x\sqrt{a-x}\,dx$. Подстановка $a-x=t^2$.

465*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Подстановка $x=\frac{1}{t}$.

466*. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$. Подстановка $\operatorname{tg} x=z$.

Найти интегралы:

467. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

468. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

469. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x-1}$.

470. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

471. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+2\sin^2 x}}$.

472. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$.

473*. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$.

474*. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$.

## § 4. Интегрирование по частям

Из формулы дифференциала произведения $d(uv)=u\,dv+v\,du$ интегрированием обеих частей равенства получается **формула интегрирования по частям**:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \qquad (*)$$

По этой формуле отыскание интеграла $\int u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\,du$. Применение ее целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл будет проще исходного или когда он будет ему подобен.

Для применения формулы интегрирования по частям к некоторому интегралу $\int f(x)\,dx$ следует подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ представить в виде произведения двух множителей: $u$ и $dv$; за $dv$ всегда выбирается такое выражение, **содержащее** $dx$, из которого посредством интегрирования можно найти $v$; за $u$ в большинстве случаев принимается функция, которая при дифференцировании упрощается (например: $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} 3x$, $\ln x$, $x^3$).

475. Найти интегралы:

1) $\int x\cos x\,dx$; 2) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$; 3) $\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx$;

4) $\int \arcsin x\,dx$; 5) $\int x^2e^{3x}\,dx$; 6) $\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx$.

Решение. 1) Положив $u=x$, $dv=\cos x\,dx$, найдем: $du=dx$, $v=\int\cos x\,dx=\sin x$. Подставляя в формулу (*), получим

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C.$$

2) Пусть $u=\ln x$, $dv=\frac{dx}{x^3}$, тогда $du=\frac{dx}{x}$, $v=\int\frac{dx}{x^3}=$ $=\int x^{-3}\,dx=-\frac{1}{2x^2}$. Подставляя в формулу (*), найдем

$$\int\frac{\ln x}{x^3}\,dx=-\frac{\ln x}{2x^2}-\int-\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{dx}{x}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C=C-\frac{1+2\ln x}{4x^2}.$$

3) Пусть $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=x\,dx$, тогда $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $v=\int x\,dx=$ $=\frac{x^2}{2}$. По формуле (*), получим

$$I=\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx. \qquad (1)$$

Последний интеграл находим отдельно:

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\operatorname{arc\,tg} x.$$

Подставляя этот результат в равенство (1), имеем

$$I=\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C=C-\frac{x}{2}+\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$$

4) Полагая $u=\arcsin x$, $dv=dx$, найдем: $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v=\int dx=x$. По формуле (*) получим

$$J=\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (2)$$

Последний интеграл найдем, преобразуя его к формуле 1:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x\,dx)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(1-x^2)=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставляя в равенство (2), имеем

$$J=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

5) Положим $u=x^2$, $dv=e^{3x}\,dx$, тогда $du=2x\,dx$, $v=\int e^{3x}dx=$ $=\frac{1}{3}\int e^{3x}\,d(3x)=\frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле (*) найдем

$$I=\int x^2e^{3x}\,dx=\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx. \qquad (3)$$

К последнему интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям. Положим $u=x$, $dv=e^{3x}\,dx$, тогда $du=dx$, $v=\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле (*) получим

$$\int xe^{3x}\,dx=\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx=\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}.$$

Подставляя в (3), имеем

$$I=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}\right)+C=\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+C.$$

Здесь понадобилось применить формулу (*) дважды. Очевидно, если бы под интегралом вместо $x^2$ было $x^3$, то пришлось бы эту формулу применить три раза. Вообще, для нахождения интеграла $\int x^n e^x\,dx$, а также и интегралов $\int x^n \sin x\,dx$, $\int x^n \cos x\,dx$ ($n$—целое положительное число) требуется применить интегрирование по частям $n$ раз.

6) Пусть $u=e^{-x}$, $dv=\cos\frac{x}{2}\,dx$, тогда $du=-e^{-x}\,dx$, $v=\int\cos\frac{x}{2}\,dx=2\int\cos\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}$. По формуле (*) имеем

$$I=\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\,dx. \tag{4}$$

К полученному интегралу $I_1$ снова применяем интегрирование по частям. Полагая $u=e^{-x}$, $dv=\sin\frac{x}{2}dx$, получим $du=-e^{-x}\,dx$, $v=\int\sin\frac{x}{2}\,dx=2\int\sin\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right)=-2\cos\frac{x}{2}$,

$$I_1=\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\,dx=-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx=$$
$$=-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2I.$$

Подставляя этот результат в (4), получим уравнение с неизвестным интегралом $I$:

$$I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\left(-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2I\right),$$

из которого находим

$$5I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2},\qquad I=\frac{2}{5}e^{-x}\left(\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\right)+C.$$

Если при отыскании $I_1$ выбрать $u$ и $dv$ иначе: $u=\sin\frac{x}{2}$, $dv=e^{-x}\,dx$, то получим $du=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$, $v=-e^{-x}$,

$$I_1=-e^{-x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=-e^{-x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}I.$$

Подставляя $I_1$ в равенство (4), получим бесполезное тождество

$$I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\left(-e^{-x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}I\right);\quad 0=0.$$

Это решение показывает, что повторное интегрирование по частям может привести к исходному интегралу $I$. В таком случае получается или уравнение, из которого легко найти $I$, или, при неудачном выборе $u$ и $dv$ в повторном интегрировании, бесполезное тождество.

Найти интегралы:

476. $\int x \sin x\, dx$.
477. $\int x^2 \ln x\, dx$.
478. $\int \ln (x^n)\, dx$.
479. $\int (x^2+1) e^{-2x}\, dx$.
480. $\int x \sec^2 x\, dx$.
481. $\int x \ln (x-1)\, dx$.
482. $\int \operatorname{arcctg} t\, dt$.
483. $\int \ln (1+x^2)\, dx$.
484. $\int e^{ax} \sin bx\, dx$.
485*. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx$.
486*. $\int \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^2}$.
487*. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}\, dx$.

## § 5. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx; \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx; \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx.$$

Для отыскания указанных интегралов от функций, содержащих квадратный трехчлен, для преобразования их к формулам интегрирования следует вначале выделить полный квадрат из квадратного трехчлена, в результате чего он преобразуется в квадратный двучлен $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$ $=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]$.

В дальнейшем интегралы указанных видов можно свести к формулам интегрирования посредством преобразований, применяемых в решении следующих задач.

488. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; 2) $\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1} dx$;

3) $\int \frac{3x-2}{x^2+6x+9} dx$; 4) $\int \frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2} dx$.

Решение. 1) Выделив из квадратного трехчлена полный квадрат $x^2+4x+8=(x+2)^2+4$, записав $d(x+2)$ вместо $dx$ и интегрируя, получим

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8}=\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4}=\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2}+C,$$

по формуле 8, при $u=x+2$, $a=2$.

2) Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат

$$2x^2-3x+1=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{9}{16}\right]=$$
$$=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$$