Найти интегралы:

476. $\int x \sin x\, dx$. 477. $\int x^2 \ln x\, dx$.

478. $\int \ln (x^n)\, dx$. 479. $\int (x^2+1) e^{-2x}\, dx$.

480. $\int x \sec^2 x\, dx$. 481. $\int x \ln (x-1)\, dx$.

482. $\int \operatorname{arcctg} t\, dt$. 483. $\int \ln (1+x^2)\, dx$.

484. $\int e^{ax} \sin bx\, dx$. 485*. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx$.

486*. $\int \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^2}$. 487*. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}\, dx$.

§ 5. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx; \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx; \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx.$$

Для отыскания указанных интегралов от функций, содержащих квадратный трехчлен, для преобразования их к формулам интегрирования следует вначале выделить полный квадрат из квадратного трехчлена, в результате чего он преобразуется в квадратный двучлен $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]$.

В дальнейшем интегралы указанных видов можно свести к формулам интегрирования посредством преобразований, применяемых в решении следующих задач.

488. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; 2) $\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx$;

3) $\int \frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx$; 4) $\int \frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}dx$.

Решение. 1) Выделив из квадратного трехчлена полный квадрат $x^2+4x+8=(x+2)^2+4$, записав $d(x+2)$ вместо dx и интегрируя, получим

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C,$$

по формуле 8, при $u=x+2$, $a=2$.

2) Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат

$$2x^2-3x+1 = 2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{9}{16}\right] = 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$$

и заменим переменную x, полагая $x-\frac{3}{4}=t$. Тогда получим: $dx=dt$,

$$I=\int\frac{(7-8x)\,dx}{2x^2-3x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{1-8t}{t^2-\frac{1}{16}}\,dt.$$

Далее разложим полученный интеграл на два слагаемых интеграла, соответственно двум слагаемым в числителе, и находим их по формулам:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{16}}-2\int\frac{2t\,dt}{t^2-\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right|-2\ln\left|t^2-\frac{1}{16}\right|+C.^*$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$I=\ln\left|\frac{x-1}{x-0{,}5}\right|-2\ln|x^2-1{,}5x+0{,}5|+C.$$

3) Выделяем полный квадрат $x^2+6x+9=(x+3)^2$, вводим новую переменную $t=x+3$; тогда получим $dx=dt$ и

$$\int\frac{(3x-2)\,dx}{x^2+6x+9}=\int\frac{3t-11}{t^2}\,dt=\int\left(\frac{3}{t}+\frac{11}{t^2}\right)dt=3\int\frac{dt}{t}-11\int t^{-2}\,dt=$$

$$=3\ln|t|+11t^{-1}+C=3\ln|x+3|+\frac{11}{x+3}+C.$$

4) Вначале выделяем из подынтегральной неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель:

$$\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}=-2x+1+\frac{x-1}{2x-3x^2},$$

затем интегрируем каждое слагаемое отдельно:

$$J=\int\frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}\,dx=-2\int x\,dx+\int dx+\int\frac{(x-1)\,dx}{2x-3x^2}=$$

$$=-x^2+x+J_1.$$

Интеграл J_1 преобразуем к формулам 2 и 9:

$$J_1=-\frac{1}{3}\int\frac{(x-1)\,dx}{x^2-\frac{2}{3}x}=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|x-\frac{2}{3}\right|+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\right|=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|x-\frac{2}{3}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{x}\right|.$$

---

* Первый интеграл по формуле 9 при $u=t$, $a=\frac{1}{4}$, второй интеграл по формуле 2 при $u=t^2-\frac{1}{16}$.

Окончательно получим

$$J=C-x^2+x+\frac{1}{6}\ln\left|x-\frac{2}{3}\right|-\frac{1}{2}\ln|x|.$$

489. Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$; 2) $\int\frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}$.

Решение. 1) Выделив из трехчлена полный квадрат $x^2-4x-3=(x-2)^2-7$, записав $d(x-2)$ вместо dx и интегрируя, найдем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-7}}=\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-7}\right|+C$$

(по формуле 11, при $u=x-2$, $a=-7$).

2) Выделяем из квадратного трехчлена полный квадрат $9+6x-3x^2=-3(x^2-2x-3)=-3[(x-1)^2-4]=3[4-(x-1)^2]$ и вводим новую временную $z=x-1$. Тогда получим: $dx=dz$,

$$I=\int\frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3z-2}{\sqrt{4-z^2}}dz.$$

Разложив полученный интеграл на два интеграла,

$$I=\frac{3}{\sqrt{3}}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{4-z^2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dz}{\sqrt{4-z^2}}=\sqrt{3}\,I_1-\frac{2}{\sqrt{3}}I_2,$$

находим каждый из них отдельно.

Первый интеграл преобразуем к формуле 1, умножая и деля его иа -2 и заменяя $-2z\,dz$ через $d(4-z^2)$:

$$I_1=\int\frac{z\,dz}{\sqrt{4-z^2}}=-\frac{1}{2}\int(4-z^2)^{-\frac{1}{2}}(-2z\,dz)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(4-z^2)^{-\frac{1}{2}}d(4-z^2)=-(4-z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Второй интеграл находим по формуле 10, при $u=z$, $a=2$:

$$I_2=\int\frac{dz}{\sqrt{4-z^2}}=\arcsin\frac{z}{2}.$$

Подставляя найденные интегралы I_1 и I_2 и возвращаясь к переменной x, получим

$$I=C-\sqrt{3(4-z^2)}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{z}{2}=C-\sqrt{9+6x-3x^2}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}.$$

490. Посредством формулы интегрирования по частям $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ (§ 4) найти интегралы:

А) $\int\sqrt{t^2+b}\,dt$ и Б) $\sqrt{a^2-t^2}\,dt$.

Затем, пользуясь полученными результатами как формулами, найти интегралы:

1) $\int \sqrt{x^2-3}\,dx$; 2) $\int \sqrt{x^2+2x+6}\,dx$; 3) $\int \sqrt{3+4x-x^2}\,dx$.

Решение. А) Полагая в формуле интегрирования по частям $u=\sqrt{t^2+b}$, $dv=dt$, получим $du=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+b}}$, $v=t$ и

$$I=\int \sqrt{t^2+b}\,dt=t\sqrt{t^2+b}-\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+b}}\,dt.$$

Прибавив и вычтя постоянную b в числителе подынтегральиой функции последнего интеграла, разложим его на два интеграла:

$$I=t\sqrt{t^2+b}-I+b\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+b}}.$$

Далее, перенося искомый интеграл I из правой части равенства в левую и заменяя интеграл, оставшийся в правой части равенства, по формуле 11, получим

$$2I=t\sqrt{t^2+b}+b\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+b}},$$

$$I=\int \sqrt{t^2+b}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+b}+\frac{b}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+b}\right|+C. \qquad \text{(А)}$$

Б) Пусть $u=\sqrt{a^2-t^2}$, $dv=dt$, тогда $du=\frac{-t}{\sqrt{a^2-t^2}}dt$, $v=t$ и по формуле нтегрирования по частям

$$J=\int \sqrt{a^2-t^2}\,dt=t\sqrt{a^2-t^2}-\int \frac{-t^2}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt.$$

Последний интеграл разложим на два интеграла, прибавляя и вычитая постоянную a^2 в числителе его подынтегральной функции:

$$J=t\sqrt{a^2-t^2}-J+a^2\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}},$$

откуда получим

$$2J=t\sqrt{a^2-t^2}+a^2\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}},$$

$$J=\int \sqrt{a^2-t^2}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}+C. \qquad \text{(Б)}$$

1) Пользуясь равенством (А) как формулой, при $t=x$, $b=-3$, получим

$$\int \sqrt{x^2-3}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-3}-\frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C.$$

2) Выделяем полный квадрат в подкоренном выражении $x^2+2x+6=(x+1)^2+5$, затем применяем формулу (А), полагая

в ней $t=x+1$, $b=5$:

$$\int\sqrt{x^2+2x+6}\,dx=\int\sqrt{(x+1)^2+5}\,d(x+1)=$$
$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left[x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right]+C.$$

3) Выделяя полный квадрат в подкоренном выражении $3+4x-x^2=-(x^2-4x-3)=-[(x-2)^2-7]=7-(x-2)^2$ и применяя формулу (Б), при $t=x-2$, $a^2=7$, получим

$$\int\sqrt{3+4x-x^2}\,dx=\int\sqrt{7-(x-2)^2}\,d(x-2)=$$
$$=\frac{x-2}{2}\sqrt{7-(x-2)^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}}+C.$$

Найти интегралы:

491. $\int\frac{dx}{x^2-x-6}$.

492. $\int\frac{dx}{x^2+4x+29}$.

493. $\int\frac{dx}{4x-1-4x^2}$.

494. $\int\frac{(4x-3)\,dx}{x^2+3x+4}$.

495. $\int\frac{(3x+4)\,dx}{x^2+5x}$.

496. $\int\frac{18x^2+13x}{1+6x+9x^2}\,dx$.

497. $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}\,dx$.

498. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

499. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$.

500. $\int\frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

501. $\int\frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{x^2+6x}}$.

502*. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$.

503. $\int\sqrt{x^2+4x}\,dx$.

504. $\int\sqrt{1-2x-x^2}\,dx$.

§ 6. Интегрирование тригонометрических функций

Часто встречающиеся интегралы от выражений, содержащих тригонометрические функции следующих видов:

$$\text{I. }\int\sin^n x\,dx,\quad\int\cos^n x\,dx,\qquad\text{II. }\int\sin^m x\cos^n x\,dx,$$
$$\text{III. }\int\operatorname{tg}^n x\,dx,\qquad\int\operatorname{ctg}^n x\,dx,$$

где m и n — целые положительные числа.

$$\text{IV. }\int\sin ax\cos bx\,dx,\qquad\int\sin ax\sin bx\,dx,\qquad\int\cos ax\cos bx\,dx$$

можно свести к формулам интегрирования, а следовательно, и найти, руководствуясь следующими правилами:

1. Интегралы от четной степени синуса или косинуса можно найти путем понижения степени (вдвое) по формулам:

$$\sin^2 u=\frac{1}{2}(1-\cos 2u);\quad\cos^2 u=\frac{1}{2}(1+\cos 2u);\quad\sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u.$$